**PCSI 5** **Note /5**

# Interrogation de cours 26 du Lundi 9 Mai 2016

**Nom et prénom :**

**1.** ( **/ 1,5 points**) Compléter :
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} H \text{ est un hyperplan } &\Leftrightarrow \dim(H) = n-1 \\ &\Leftrightarrow \exists a \in E, H \oplus Vect(a) = E \\ &\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K}), \quad H = Ker(\varphi) \end{aligned}$$

**2.** ( **/ 1 points**) Soit $\sum u_n$ une série numérique. Donner une condition nécessaire de convergence ?

Pour que $\sum u_n$ converge, il faut que $\lim u_n = 0$.

Cette condition est-elle suffisante ? Justifier en donnant un exemple.

Cette condition n'est pas suffisante : par exemple, la série harmonique $H_n = \sum \frac{1}{n}$ diverge et son terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

**3.** ( **/ 1 points**)

- Donner une CNS de convergence de $\sum z^n$ et préciser sa somme.

  $\sum z^n$ converge ssi $|z| < 1$, et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

- Donner une CNS de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$ et préciser sa somme.

  $\sum z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = exp(z)$.

**4.** ( **/ 1,5 points**) Compléter :
Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ des séries à termes positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$, alors :
  - Si $\sum v_n$ est convergente, $\sum u_n$ est convergente.
  - Si $\sum u_n$ est divergente, $\sum v_n$ est divergente.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.