PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 28 du Lundi 30 Mai 2016

Nom et prénom :

1. (**/ 2 points**) Donner la définition de :

– la matrice $A = (a_{i,j})$ d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (définir le coefficient $a_{i,j}$) :

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1), \dots, u(e_p))$ de la famille $(u(e_1), ..., u(e_p))$ dans la base $\mathcal{C}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C},}(u) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} m_{i,j} f_i \text{ pour tout } 1 \leq j \leq p.$$

– la matrice de passage $P = (p_{i,j})$ entre des bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ d'un espace vectoriel E (définir le coefficient $p_{i,j}$) :

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, on appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,n,} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad u_j = \sum_{k=1}^{n} m_{i,j} e_i \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n.$$

2. (**/ 2 points**) Énoncer la formule de changement de base (en définissant précisément chaque terme y apparaissant) :

– pour les vecteurs :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. Notons $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, X la matrice des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, X' la matrice des coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$. On a :

$$X = PX'.$$

– pour une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$:

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Notons $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$, on a :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

3. (/ **1 points**) Compléter :

$$A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad Ker(A) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad Im(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \Leftrightarrow \quad rg(A) = n.$$

4. (/ **1,5 points**) Donner la définition du déterminant :

C'est l'unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- f est multilinéaire par rapport aux colonnes ;
- f est antisymétrique ;
- $f(I_n) = 1$.

5. (/ **2 points**) Compléter ($A, B, T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, T triangulaire) :

$$\det(A \times B) = \det(A)\det(B) \quad \det(A + B) = \text{pas de formule} \quad \det({}^tA) = \det(A)$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad \det(T) = t_{1,1} \dots t_{n,n}.$$

6. (/ **1,5 points**) Après avoir rappelé la définition d'un mineur d'indice (i, j), donner la formule de développement d'un déterminant suivant la $i - me$ ligne.

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on appelle mineur d'indice (i, j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en rayant dans M la ligne i et la colonne j.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$