PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 7 du Lundi 2 Novembre 2015

Nom et prénom :

1. (**/ 1 point**) Énoncer la propriété d'intégration par parties :

Soient f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{K}$.

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

2. (**/ 1 points**) Énoncer la propriété de changement de variables :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I. Soient $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variables $x = \varphi(t)$.

3. (**/ 1 point**) Compléter :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

4. (**/ 4 points**)

1. Décomposer $\dfrac{2x+1}{x^3-1}$ en éléments simples.

   On a $P(x) = 2x+1$, $Q(x) = x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$. En particulier $deg(P) < deg(Q)$. La décomposition en éléments simples de $\dfrac{2x+1}{x^3-1}$ est donc de la forme

   $$\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

   avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On obtient $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$.

2. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+x+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}dx + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)\right) + C.\end{aligned}$$

3. En déduire une primitive de F.

$$\int \frac{2x+1}{x^3-1}dx = \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \ln(|x-1|) - \int \frac{x}{x^2+x+1}dx + C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Une primitive de $F(x) = \dfrac{2x+1}{x^3-1}$ est donc donnée par $x \mapsto \ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

5. (/ **3 points**) Résoudre l'équation différentielle : $(1+e^t)y' + e^t y = 1 - e^t$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre un avec second membre, non normalisée. Puisque $1 + e^t \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, on résout cette équation sur $\mathbb{R}$.

L'équation homogène associée est $y' + \dfrac{e^t}{1+e^t}y = 0$. On a $\displaystyle\int \frac{e^t}{1+e^t}dt = \ln(1+e^t) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme :

$$t \mapsto \lambda exp(-\ln(1+e^t)) = \frac{\lambda}{1+e^t}.$$

On cherche une solution particulière par méthode de variation de la constante : posons $f(t) = \dfrac{\lambda(t)}{1+e^t}$ avec λ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$\lambda'(t) = 1 - e^t$$

Posons $\lambda(t) = t - e^t$. Une solution particulière est donc donnée par $f(t) = \dfrac{t-e^t}{1+e^t}$.

Finalement,

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto \frac{\lambda + t - e^t}{1+e^t} \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$