TD11

Entiers naturels et dénombrement

Diviseurs

Exercice 1

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $5 | 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$,
2. $17 | 2^{6n+3} + 3^{4n+2}$,
3. $10 | 2^{2^n} - 6$ pour $n \geq 2$,
4. $676 | 27^{n+1} - 26n - 27$,

Exercice 2

Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $\dfrac{2n^2 - n - 6}{n+3} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\dfrac{21n-3}{4}$ et $\dfrac{15n-2}{4}$ ne sont pas simultanément dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 4 (Numérotation en base $b \geq 2$)

1. Démontrer que tout entier $a \in \mathbb{N}^*$ s'écrit sous la forme
$$a = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0,$$
où $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq a_i \leq b-1$, $a_n \neq 0$.
2. Démontrer que la décomposition précédente est unique. On l'appelle **l'écriture de l'entier** a **dans la base** b.
3. (a) Écrire 17 en base $10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$ respectivement.
   (b) Trouver la base b dans laquelle on a $14 \times 41 = 1224$.
4. En notant que $7 \times 11 \times 13 = 1001$, déterminer un critère de divisibilité d'un entier $n = \overline{a_n \cdots a_2 a_1 a_0}$ par $7, 11$ ou 13 faisant intervenir la somme $\overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \cdots$.
5. Écrire un algorithme de numérotation en base b.

PGCD et PPCM

Exercice 5

Calculer le pgcd de $a = 9100$ et $b = 1848$, puis de $a = n^3 + 2n$ et $b = n^4 + 3n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6

1. Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que si on divise 4373 et 826 par n, on obtient respectivement 8 et 7 pour restes.
2. Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que si on divise 6381 et 3954 par n, on obtient respectivement 9 et 6 pour restes.

Exercice 7
On considère trois entiers naturels n, p, q avec $n \geq 2$ et $q > 0$.

1. On écrit la division euclidienne de p par q sous la forme $p = aq + r$. Montrer que la division euclidienne de $n^p - 1$ par $n^q - 1$ est
$$n^p - 1 = (n^{(a-1)q+r} + \cdots + n^{2q+r} + n^{q+r} + n^r)(n^q - 1) + (n^r - 1).$$
2. En déduire $(n^p - 1) \wedge (n^q - 1)$ en fonction de n et $p \wedge q$.

Exercice 8 (Homogénéité du PGCD et du PPCM)
1. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, $(\lambda a) \wedge (\lambda b) = \lambda(a \wedge b)$.
2. En déduire que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, $(\lambda a) \vee (\lambda b) = \lambda(a \vee b)$.

Exercice 9
On cherche les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x + y = 56$ et $x \vee y = 105$.

1. Soit (x, y) une solution, et $\delta = x \wedge y$. Montrer que $\delta = 1$ ou $\delta = 7$.
2. Déterminer les couples (x, y) dans chacun des cas proposés.

Exercice 10
Chercher les couples d'entiers (a, b) tels que $a \wedge b = 42$ et $a \vee b = 1680$.

Exercice 11
Déterminer les entiers $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\text{ppcm}(28, b) = 140$.

Nombres premiers

Exercice 12
Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$, soit p un nombre premier. Montrer que $p | a^n \Rightarrow p^n | a^n$.

Exercice 13
Soient $a, b, c, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $ab = c^k$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \alpha^k$ et $b = \beta^k$.

Exercice 14 (Petit théorème de Fermat)
1. Soit $p \in \mathbb{P}$. Montrer que pour tout $k = 1, \cdots, p - 1$, $p | \binom{p}{k}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, p divise $n^p - n$.
3. (a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, 42 divise $a^7 - a$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$

Exercice 15 (Infinité de nombres premiers de la forme 4n-1)
On suppose qu'il existe un nombre fini N d'entiers premiers de la forme $4n-1$ où $n \geq 1$. On les note $p_1, \ldots, p_N$, et on forme le nombre $4p_1 \ldots p_N - 1$. Montrer que ce nombre admet nécessairement un diviseur premier de la forme $4n-1$, et en déduire une contradiction. Conclure.

Exercice 16
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers.

1. Calculer le nombre de diviseurs positifs de n.
2. Calculer la somme $S(n)$ des diviseurs positifs de n.
3. Montrer que si m et n sont premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

Dénombrement

Exercice 17
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Montrer que :

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(X) = n2^{n-1}.$$

On pourra effectuer le changement de variable $Y = X^c$, ou remarquer que $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=1}^{n} \{X \in \mathcal{P}(E) / \operatorname{Card}(X) = k\}$.

Exercice 18
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Calculer :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \operatorname{Card}(X \cap Y) \text{ et } \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \operatorname{Card}(X \cup Y).$$

Exercice 19
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille d'ensembles finis. Montrer que :

$$\operatorname{Card}(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \sum_{I \in I_k} \operatorname{Card}(\bigcap_{i \in I} E_i) \right),$$

où I_k désigne l'ensemble des parties de $[|1, n|]$ à k éléments.

Exercice 20
Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit A une partie de E qui contient p éléments.

1. Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant exactement un élément de A ?
2. Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant au moins un élément de A ?

Exercice 21
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

2. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre de triplets $(X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que $X \subset Y \subset Z$.

Exercice 22
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Quel est le nombre de partitions de E en 2 parties ? en 3 parties ?

Exercice 23
Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

1. On tire simultanément cinq boules de l'urne.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
2. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
   (a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque ?

Exercice 24
On dispose de 12 mouchoirs identiques, qui ne diffèrent que par leur couleur : 5 sont bleus, 4 sont verts et 3 sont rouges. On forme une pile constituée de tous ces mouchoirs.

1. Combien peut-on former de piles différentes ?
2. Dans combien de ces dispositions retrouve-t-on les mouchoirs rouges au dessus de la pile ?

Exercice 25
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[|1, p|]$ dans $[|1, n|]$.

Exercice 26 (Un peu de poker)
On considère un jeu de 52 cartes réparties en 4 couleurs. Chacune de ces couleurs est constituée de 13 hauteurs : du 2 au 10, valet, dame, roi, as. Dans ce jeu de 52 cartes, on choisit simultanément 5 cartes. Ces 5 cartes sont appelées une “main”.

1. Déterminer le nombre de mains.
2. Déterminer le nombre de mains qui contiennent un carré.
3. Déterminer le nombre de mains qui contiennent au moins un trèfle.
4. Déterminer le nombre de mains qui contiennent un brelan d'as.
5. Déterminer le nombre de “full”.
6. Déterminer le nombre de mains qui contiennent une double paire.
7. Déterminer le nombre de mains qui contiennent exactement un roi et un coeur.
8. Déterminer le nombre de “quintes” (5 cartes qui se suivent sans être de la même couleur).
9. Déterminer le nombre de “couleurs” (5 cartes de la même couleur qui ne se suivent pas).
