TD12

Calcul matriciel

Opérations matricielles

Exercice 1

Résoudre l'équation $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On considère l'ensemble suivant :

$$Z = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}.$$

a) Proposer deux matrices appartenant à Z.

b) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à Z ?

c) Déterminer Z (*On pensera à utiliser les matrices élémentaires* $E_{i,j}$).

Exercice 3

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si pour tout (i,j) dans $[|1,n|]^2$, $a_{i,j}$ est un réel positif et que $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.
Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrer que si A et B sont deux matrices stochastiques, alors $\lambda A + (1-\lambda)B$ et $A \times B$ sont stochastiques.

Exercice 4

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de M, et on note $tr(M)$ le nombre :

$$tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.$$

a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$tr(\lambda A + \mu B) = \lambda tr(A) + \mu tr(B).$$

b) Montrer que $tr({}^tA) = tr(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

c) Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

d) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$tr(PAP^{-1}) = tr(A).$$

Puissances d'une matrice carrée

Exercice 5

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ avec :

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 6
Soient (x_n), (y_n), (z_n) trois suites réelles définies par $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} & = & \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ z_{n+1} & = & \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{2}{3}z_n \end{array} \right.$$

Déterminer x_n, y_n et z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, x_0, y_0 et z_0.

Exercice 7
Montrer que $A = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente et préciser son ordre de nilpotence. En déduire $(I_3 + A)^{10}$ et l'inverse de $I_3 - A$.

Opérations élémentaires sur une matrice

Exercice 8
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer l'unique matrice R échelonnée réduite (en lignes) équivalente (par lignes) à A. Expliciter la matrice E, produit de matrices d'opérations élémentaires, telle que $EA = R$.

Exercice 9
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & -6 & -6 & -4 & -2 \\ -3 & 12 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Transformer A avec des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour obtenir une matrice $J_r \in \mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{R})$. Déterminer alors deux matrices U et V inversibles telles que $UAV = J_r$.

Matrices carrées inversibles

Exercice 10
On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $A^3 - 4A^2 + 5A$.

b) Montrer que A est inversible, et exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.

Exercice 11
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

b) Retrouver ce résultat en montrant que $A^2 - 4A + I_2 = 0$.

Exercice 12
Déterminer l'inverse, s'il existe, des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13
Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles en discutant suivant le paramètre réel α et dans ce cas, calculer leur inverse :

a) $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 14
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}DP$ ainsi que D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Mêmes questions avec les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
3. Montrer que $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} & = & -4u_n + 5v_n \end{array} \right.$$
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (u_n) et (v_n) en fonction de u_0 et v_0 et de n.
Etudier le comportement de ces deux suites.

5. On considère deux fonction définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles x et y dérivables sur $\mathbb{R}$.
On suppose que x et y vérifient le système différentiel suivant :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x + 2y \\ y' & = & -4x + 5y \end{array} \right.$$
On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
On définit deux fonctions $x_1, y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $X_1 = P^{-1} \cdot X$. On pose $X_1' = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$
Montrer que $X_1' = D \cdot X_1$.
En déduire deux équations différentielles vérifiées par x_1 et y_1, puis déterminer les fonctions x_1 et y_1, et en déduire les solutions x et y du système de départ.
