TD13

Limites et continuité

Limites de fonctions

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes (si elles existent) :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln(x+\sqrt{x^2+1}))$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}-2)$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 5x}{\sin 2x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$;

h) $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\sin^2 x-\sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2}$;

i) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x^2)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$;

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x\sin\dfrac{1}{x}$;

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}$;

m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{3}}$;

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$.

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes, si elles existent (et montrer qu'elles n'existent pas le cas échéant) :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x\cos\dfrac{1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(-1)^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}}{x}$.

Exercice 3

Étudier la limite (éventuellement les limites à gauche et à droite) de chacune des expressions suivantes au point considéré :

a) $\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ en a ;

b) $\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1}$ en 1 ;

c) $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0.

Exercice 4

Les fonctions suivantes sont-elles continues ou prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

a) $x\mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)\sin\frac{1}{x}$;

b) $x\mapsto x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$;

c) $x\mapsto \lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$;

d) $x\mapsto \sin(1+x)\ln|1+x|$.

Exercice 5

Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

a) $f(x)=(1+x)^{1/x}$,

b) $f(x)=\cos(\frac{1}{x})$,

c) $f(x)=x\cos(\frac{1}{x})$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que :

- il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{ax} f(x) = 0$;
- il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto e^{bx} f(x)$ ne tende pas vers 0 quand $x \to +\infty$.

a) Justifier l'existence de $\lambda = \sup\{c \in \mathbb{R} | \lim\limits_{x \to +\infty} e^{cx} f(x) = 0\}$.

b) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{x \to +\infty} e^{(\lambda - \varepsilon)x} f(x) = 0$.

c) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $x \mapsto e^{(\lambda+\varepsilon)x} f(x)$ n'est bornée sur aucun voisinage de $+\infty$.

Exercice 7

Soient f et g deux fonctions de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $M(x) = \sup\limits_{t \in [-1,1]} (f(t) + xg(t))$

a) Expliciter $M(x)$ lorsque $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$ et $g(t) = t$.

b) Montrer que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie.

c) Montrer que : $\forall h > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $M(x + h) \leq M(x) + h \sup\limits_{t \in [-1,1]} g$ et $M(x + h) \geq M(x) + h \inf\limits_{t \in [-1,1]} g$.

d) En déduire que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 8

Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ Montrer que f est bijective et discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 9

a) Montrer que si f et g sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$, alors $f = g$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) < g(x)$.

 (i) Montrer que $f \leq g$.

 (ii) Montrer qu'on n'a pas nécessairement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

Exercice 10

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc}]0, 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}. \end{array}$

a) Montrer que f est bijective.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{-1}(2^{-n})$.

Image d'un intervalle par une fonction continue

Exercice 11

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I vérifiant $\forall x \in I$, $|f(x)| = |g(x)|$ et $f(x) \neq 0$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$. Que dire si les fonctions ne sont pas continues ?

Exercice 12

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si f prend un nombre fini de valeurs, alors f est constante.

Exercice 13

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) On suppose que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

b) Même question lorsqu'on suppose que $[a, b] \subset f([a, b])$.

Exercice 14

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x_1, x_2 \in [0, 1]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 - x_2 = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 15

Un randonneur parcourt 20km en 5h. Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il a fait exactement 4km. Il prétend que, sur n'importe quel intervalle de deux heures, il a parcouru 10km. Est-ce possible ?

Exercice 16

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et injective. On se propose de montrer que f est strictement monotone.

a) **Première méthode :** On considère $a, b, x, y \in I$ avec $a < b$ et $x < y$. On pose pour $t \in [0, 1]$, $u(t) = tx + (1 - t)a$ et $v(t) = ty + (1 - t)b$. On pose $G(t) = f(u(t)) - f(v(t))$.

   (i) Calculer $u(0), u(1), v(0), v(1)$. Tracer u et v.

   (ii) Montrer que $\forall t \in [0, 1]$, $u(t) < v(t)$.

   (iii) En déduire que G ne s'annule pas sur $[0, 1]$ puis que $G(0)$ et $G(1)$ ont le même signe.

   (iv) En déduire que f est monotone sur I.

b) **Deuxième méthode :** On suppose que f n'est pas monotone.

   (i) Expliquer pourquoi on peut supposer qu'il existe $a < b < c$ tels que $f(a) < f(b)$ et $f(b) > f(c)$. Faire un dessin.

   (ii) Conclure.

Exercice 17

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ vérifiant $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, et pour tout $x \in [0, 1]$, $f \circ f(x) = x$. Déterminer f.

Exercice 18
Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que f ne peut pas tendre vers $\pm\infty$ quand $x \to +\infty$.

b) Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors f est constante.

c) On suppose f continue. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes.

Exercice 19
On considère, pour une application $f : I \to \mathbb{R}$ les deux assertions :

$$A \ : \ \forall x \in I, \ f(x) > 0 \quad ; \quad B \ : \ \exists \alpha > 0, \forall x \in I, f(x) \geq 0.$$

Étudier si $A \Rightarrow B$ dans chacun des cas suivants :

a) $I = [0,1]$ et f continue sur I ;

b) $I = \mathbb{R}$ et f continue sur $\mathbb{R}$;

c) $I =]0,1[$ et f continue sur I ;

d) $I = [0,1]$.

Exercice 20
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21
Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [0,1], \ f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0,1], \ f(x) + m \leq g(x)$.

Exercice 22
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

a) Supposons que $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$ soient finies. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$. La fonction f atteint-elle ses bornes ?

b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$, montrer que f admet un minimum absolu.

Exercice 23
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que:

$$\sup_{x \in]a,b[} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } \inf_{x \in]a,b[} f(x) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Équations fonctionnelles

Exercice 24
Déterminer toutes les fonctions continues sur l'intervalle considéré vérifiant les équations fonctionnelles suivantes :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$;

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 = f(x)$;

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x^2) = f(x)$ *(utiliser les suites* $(x^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(x^{2^{-n}})_{n\in\mathbb{N}}$*)* ;

d) $\forall x \in [0,1]$, $f(x^2) \leq f(x)$ et $f(0) = f(1)$ *(utiliser les suites* $(x^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(x^{2^{-n}})_{n\in\mathbb{N}}$*)* ;

e) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\frac{x+1}{2}) = f(x)$ *(étudier la suite définie par* $u_0 = x$ *et* $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$*).*

Exercice 25

Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant les équations fonctionnelles suivantes :

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$;

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

c) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$.
