TD14

Dérivabilité

Dérivabilité

Exercice 1

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient f et $g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$. Déterminer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(a+x)-f(a-x)}{2x} \quad ; \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a} \quad ; \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}.$$

Exercice 2

Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes:

a) $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^{n+1}+x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $g : x \mapsto \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$;

c) $h : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$;

d) $u : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{\ln|x|}\cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Exercice 3

On considère la fonction définie par : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$.

a) Montrer que f réalise une bijection vers un intervalle que l'on précisera.

b) Sans déterminer f^{-1}, montrer que f^{-1} est dérivable sur un intervalle que l'on précisera et calculer $(f^{-1})'$.

Exercice 4

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que f est paire si et seulement si f' est impaire.

b) Montrer que si f est impaire, f' est paire. Que dire de la réciproque ?

c) Montrer que si f est périodique, f' est périodique. Que dire de la réciproque ?

Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Exercice 5

Soit $n > 2$, calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (x^2+1)e^{3x} \end{array}$.

Exercice 6

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

a) $f_1 : x \mapsto \cos^3 x$; | b) $f_2 : x \mapsto e^x \sin x$; | c) $f_3 : x \mapsto (x^3+x^2+1)e^{-x}$.

Exercice 7
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et admet une dérivée d'ordre n de la forme $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ où P_n est un polynôme.

b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a la relation de récurrence :

$$P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - (2n+1)P_n.$$

c) Chercher une équation différentielle simple liant f et f'. En appliquant alors la formule de Leibniz, montrer que :

$$\forall n \geq 1,\ P_{n+1} + (2n+1)XP_n + n^2(1+X^2)P_{n-1} = 0 \text{ puis } P_n' = -n^2P_{n-1}.$$

d) Calculer $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

2 Propriétés des fonctions dérivables

Exercice 8
Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$.
On pose :

$$g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f\left(\frac{1}{x} + a - 1\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(a) & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

a) Montrer que g est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

b) En déduire qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

c) Proposer une autre preuve de l'existence d'un tel c sans passer par la fonction auxiliaire g.

Exercice 9
Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions.

Exercice 10
Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$, soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $\exists c \in]a, b[,\ f'(c) = -\lambda \frac{f(c)}{c}$.

Exercice 11
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$ $(0 < a < b)$. Montrer qu'il existe un point de la courbe représentative de f où la tangente passe par l'origine.

Exercice 12 (Règle de l'Hôpital)
Soient f et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, dérivables sur $]a,b[$ telles que $\forall x \in]a,b[,\ g'(x) \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. On commencera par justifier que le membre de gauche est bien défini et on pourra considérer $f - \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{R}$ bien choisi.

b) En déduire que si $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to l$ quand $x \to a^+$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ aussi.

c) Application. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Exercice 13
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

a) À quel type de fonction f correspond le cas $M = 0$? On suppose dans la suite que $M > 0$.

b) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $c_x \in]a,b[$ tel que :

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x).$$

(On pourra introduire la fonction $g(t) = f(t) - \dfrac{A}{2}(t-a)(t-b)$ avec A tel que $g(x) = 0$.)

c) En déduire que : $\forall x \in [a,b],\ |f(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(x-b)$, puis que : $|f'(a)| \leq \dfrac{M}{2}(b-a)$.

Exercice 14
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f' a une limite finie l en $+\infty$, alors $\dfrac{f(x)}{x} \to l$ quand $x \to +\infty$. (On pourra commencer par se ramener au cas $l = 0$)

Exercice 15
On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \text{ si } x < 0 \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \text{ sinon.} \end{array} \right.$

Peut-on déterminer a, b, c pour que f soit de classe $\mathcal{C}^2$, $\mathcal{C}^3$?

Exercice 16
Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $x(x-1)y' + (2x-1)y = 1$,

b) $xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$.

Exercice 17
On considère $f : \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-1/x^2} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$.

a) Montrer que f est continue et dérivable en 0.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(t) = P_n(\frac{1}{t})e^{-\frac{1}{t^2}}$.

c) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18

À l'aide des accroissements finis, majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

$$\sqrt{10001} \approx 100 \quad ; \quad \frac{1}{0,999^2} \approx 1 \quad ; \quad \cos 1 \approx \frac{1}{2}.$$

Exercice 19

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln \frac{x+1}{x} \leq \frac{1}{x}$.

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\left(\frac{1+x}{x}\right)^x \leq e \leq \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.

Exercice 20

Montrer les inégalités suivantes :

a) $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$;

b) $\forall (x, y) \in [0, 1[^2$, $x < y$, $\frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} < \arcsin y - \arcsin x < \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}$.

Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 21

a) On définit la suite (u_n) par : $u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2} \sin u_n$. Étudier la convergence de (u_n).

b) On définit la suite (u_n) par : $u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos u_n$. Étudier la convergence de (u_n).

Exercice 22

On définit la suite (u_n) par: $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{1}{e}, 1]$.

b) Montrer que (u_n) converge. On note l sa limite.

c) Comment obtenir une valeur approchée de l à 10^{-3} près ?

Exercice 23

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2} \sin\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$. On pose donc $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{2} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

a) Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \in [1, \frac{3}{2}]$.

c) Montrer que f admet un unique point fixe sur $[1, \frac{3}{2}]$.

d) Montrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, \frac{3}{2}]$ et déterminer la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
