TD16

Polynômes

Exercice 20 Soit n un entier strictement positif. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n.$$

En déduire $\prod_{k=1}^{p} cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

Solution.

On a montré que les $n-1$ racines distinctes a_k de P sont $(-i)cotan(\frac{k\pi}{n})$. Puisque $\deg(P) = n-1$, ces racines sont simples, et P est scindé à racines simples. Comme de plus $CD(P) = 2n$, on en avait déduit la factorisation suivante de P (factorisation en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$) :

$$P = 2n \prod_{k=1}^{n-1} \left(X + icotan(\frac{k\pi}{n}) \right).$$

On utilise à présent les relations coefficients racines : on a par le cours, si on note $P = \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$ (P est de degré $n-1$!) :

$$\prod_{k=1}^{n-1} (-i)cotan(\frac{k\pi}{n}) = (-1)^{n-1}\frac{p_0}{p_{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{P(0)}{2n} = (-1)^{n-1}\frac{(1-(-1)^n)}{2n}.$$

C'est ici que j'avais fait une erreur de signe, en écrivant $(-1)^n$ à la place de $(-1)^{n-1}$ car je n'avais pas fait attention que le polynôme est de degré $n-1$ et pas n !

Prenons $n = 2p+1$ dans la relation précédente. On a :
On a :

- $\prod_{k=1}^{2p}(-i)cotan(\frac{k\pi}{2p+1}) = (-i)^{2p}\prod_{k=1}^{2p} cotan(\frac{k\pi}{2p+1}) = (-1)^p \prod_{k=1}^{2p} cotan(\frac{k\pi}{2p+1})$.
- $(-1)^{2p}\dfrac{(1-(-1)^{2p+1})}{4p+2} = \dfrac{2}{4p+2} = \dfrac{1}{2p+1}$.

D'où l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{2p} cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{(-1)^p}{2p+1} \qquad (*)$$

Reste la dernière inégalité à démontrer, calculons $\prod_{k=p+1}^{2p} cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$ (on fait le changement de variables $j = 2p+1-k$, $j : p \to 1$) :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=p+1}^{2p} cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) &= \prod_{j=1}^{p} cotan\left(\frac{(2p+1-j)\pi}{2p+1}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{p} cotan\left(\pi - \frac{j\pi}{2p+1}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{p} \left(-cotan\left(\frac{j\pi}{2p+1}\right)\right) \quad \text{(vérifiez que } cotan(\pi - x) = -cotan(x)\text{)} \\
&= (-1)^p \prod_{j=1}^{p} cotan\left(\frac{j\pi}{2p+1}\right)
\end{aligned}$$

D'où finalement en remplaçant dans $(*)$:

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^p}{2p+1} = \prod_{k=1}^{2p} cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) &= \left(\prod_{k=1}^{p} cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)\left(\prod_{k=p+1}^{2p} cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)\\ &= \left(\prod_{k=1}^{p} cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)\left((-1)^p\prod_{j=1}^{p} cotan\left(\frac{j\pi}{2p+1}\right)\right)\\ &= (-1)^p\left(\prod_{k=1}^{p} cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)^2\end{aligned}$$

On obtient (enfin) la formule demandée :

$$\left(\prod_{k=1}^{p} cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

Exercice 20. Polynômes d'interpolation de Lagranges

Etant donné (n+1) complexes distincts $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ et (n+1) complexes $(b_0, b_1, \cdots, b_n)$, on cherche un polynôme P de degré minimal tel que

$$\forall i \in [|0, n|], P(a_i) = b_i.$$

Proposition : Un tel polynôme existe. Il est de plus unique si l'on suppose que $\deg(P) \leq n$.

1. On définit $L_i = \prod_{k\neq i} \frac{X-a_k}{a_i-a_k}$. Montrer que $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ pour tout i, et calculer $L_i(a_j)$.
   En déduire l'existence du polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $\forall i \in [|0, n|], P(a_i) = b_i$.
2. Démontrer l'unicité d'un tel polynôme. Y a-t-il toujours unicité si on ne suppose pas $\deg(P) \leq n$?

Solution.

1. Pour tout $0 \leq i \leq n$, on définit le polynôme L_i (i-ème polynôme de Lagrange associé à $a_0 < \cdots < a_n$) par :

$$L_i(X) = \prod_{k\neq i} \frac{X-a_k}{a_i-a_k} = \frac{(X-a_0)\dots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\dots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)}.$$

On observe immédiatement que $\deg(L_i) = n$ et que $a_0, \dots a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ sont racines de L_i. De plus :

$$L_i(a_i) = \frac{(a_i-a_0)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_n-a_n)}{(a_i-a_0)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)} = 1$$

Ainsi on a montré que $L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$.

Pour déterminer P tel que $\forall i \in [|0, n|], P(a_i) = b_i.$, on cherche à utiliser les polynômes L_i, et à en prendre une combinaison linéaire. Vu les valeurs des L_i sur a_j, on peut penser à proposer :

$$P = b_0L_0 + \dots b_nL_n.$$

Montrons qu'un tel polynôme convient :

- P est une combinaison linéaire de polynômes de degrés n, donc $\deg(P) \leq n$.
- On évalue P en a_i pour $i \in [|0,n|]$:

$$P(a_i) = b_0 \underbrace{L_0(a_i)}_{=0} + \cdots + b_i \underbrace{L_i(a_i)}_{=1} + \cdots + b_n \underbrace{L_n(a_i)}_{=0} = b_i.$$

On obtient bien l'existence d'un tel polynôme.

2. Soient P_1 et P_2 répondant au problème. Montrons que $P_1 = P_2$ (on aura alors l'unicité). Posons $Q = P_1 - P_2$. On a :
$$Q(a_i) = P_1(a_i) - P_2(a_i) = b_i - b_i = 0$$
pour tout $i \in [|0,n|]$. Ainsi Q a $n+1$ racines distinctes. Comme de plus $\deg(Q) \leq n$ (car $\deg(P_1), \deg(P_2) \leq n$), on obtient (cours) que $Q = 0$, et donc que $P_1 = P_2$.

Remarques.

- Si on retire l'hypothèse $\deg(P) \leq n$, alors on n'a plus l'unicité : par exemple le polynôme Q suivant convient :
$$Q = P + (X - a_0) \dots (X - a_n).$$
On a bien $Q(a_i) = P(a_i) = b_i$ pour tout i.

- Il faut savoir retrouver l'expression des L_i à partir de la caractérisation $L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$.

  En effet grâce à cette caractérisation, on en déduit que $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ sont racines de L_i. Comme $\deg(L_i) = n$, on en déduit que :
$$L_i = \lambda (X - a_0) \dots (X - a_{i-1})(X - a_{i+1}) \dots (X - a_n).$$
  On détermine alors $\lambda \in \mathbb{K}$ en utilisant la dernière relation $L_i(a_i) = 1$. D'où :
$$\lambda = \frac{1}{(a_i - a_0) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)}$$
  Finalement, on retrouve l'expression de L_i :
$$L_i(X) = \frac{(X - a_0) \dots (X - a_{i-1})(X - a_{i+1}) \dots (X - a_n)}{(a_i - a_0) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)}.$$
