TD18

Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1

a) Montrer que $((1,1,1),(2,1,1),(2,1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer les coordonnées de (a,b,c) dans cette base.

Exercice 2

Soient $e_1=(1,1,2,2)$, $e_2=(1,1,1,1)$, $e_3=(1,2,3,4)$, $e_4=(1,-1,1,1)$.

a) Montrer que (e_1,e_2,e_3,e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Quelles sont les coordonnées de $(4,3,2,1)$ dans cette base.

Exercice 3

a) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $a\in\mathbb{K}$. Montrer que la famille $((X-a)^k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et calculer les coordonnées de $P\in\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$, $a_0,\dots a_n\in\mathbb{K}$ des éléments deux à deux distincts. On note L_i le i-ème polynôme de Lagrange associé aux a_j, défini par $L_i\in\mathbb{K}_n[X]$ et $L_i(a_j)=\delta_{i,j}$.

Montrer que la famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et calculer les coordonnées de $P\in\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u=(1,0,2)$, $v=(1,1,2)$, $w=(1,2,2)$, $t=(2,2,2)$.

a) Montrer que (u,v,w,t) est générateur de $\mathbb{R}^3$.

b) En extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5

Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille (e_1,e_2) avec $e_1=(1,1,1,1)\quad e_2=(1,1,-1,-1)$.

Exercice 6

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

a) $E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ -x+3y+z=0\}$;

b) $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \text{ et } x-3y=0\}$;

c) $E_3=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+y=0, y+z=0, z+t=0, t+x=0\}$;

d) $E_4=\{P\in\mathbb{R}_4[X],\ P(1)=0\}$;

e) $E_5=\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0\\ b & a & 0\\ c & 0 & a+b\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$;

f) $E_6=\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=u_{n+1}+6u_n\}$;

g) $E_7=\{y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})|y''-2y'+5y=0\}$.

Exercice 7

a) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -2x + y + 2z = 0\}$. Déterminer une base de F, sa dimension et un supplémentaire.

b) Mêmes questions avec $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, x + y + z = 0 \text{ et } x + iy - z = 0\}$.

Exercice 8

Soient $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}_n[X]$, $A \neq 0$, et $a \in \mathbb{R}$. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ ; \ A|P\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ ; \ P(a) = 0\}$.

a) Montrer que F est un sous-e.v. de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$ et en donner une base.

c) Déterminer la dimension de F et en donner une base. En déduire une base de G.

Exercice 9

Déterminer le rang des familles suivantes :

a) $x_1 = (1, -1, 1)$, $x_2 = (-1, 1, -1)$, $x_3 = (0, 1, 1)$, $x_4 = (1, 0, 2)$;

b) $x_1 = (1, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, 0)$, $x_3 = (2, 0, 1, 1)$, $x_4 = (0, -2, 1, -1)$;

c) $x_1 = (0, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, -1)$, $x_3 = (1, -1, -1, 1)$, $x_4 = (1, 1, 1, 1)$;

d) $P_1 = X^2 + X - 3$, $P_2 = X^2 - X - 3$, $P_3 = 2X^2 - X - 6$.

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des familles finies de E. Montrer que :

$$\max(rg(\mathcal{F}), rg(\mathcal{F}')) \leq rg(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}') \leq rg(\mathcal{F}) + rg(\mathcal{F}').$$

Exercice 11

Soient $u = (1, 2, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 2, 1)$ et $F = Vect(u, v)$. Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - y = t - z \text{ et } x - z + 2t = 0\}$. Montrer que $F = G$.

Exercice 12

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $a = (0, 1, -1, 2)$, $b = (1, 3, 0, 2)$, $c = (2, 1, -3, 4)$, $d = (0, 0, 2, 1)$ et $e = (-1, 1, 0, 3)$. On pose $F = Vect(a, b, c)$ et $G = Vect(d, e)$. Déterminer les dimensions de $F, G, F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 13

Soit E un K-e.v. de dimension finie, F et G deux sous-e.v. de E de même dimension.

a) Si F et G sont deux sous-e.v. stricts de E, montrer que $F \cup G \neq E$. En déduire qu'il existe $u \in E - (F \cup G)$.

b) En raisonnant par récurrence sur $k = \dim(E) - \dim(F)$, montrer qu'il existe H sous-e.v. de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.

Exercice 14

Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, espaces vectoriels des matrices symétriques et anti-symétriques respectivement.
