TD19

Intégration

Propriétés de l'intégrale

Exercice 1
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f continue sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f| \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ garde un signe constant sur } [a,b].$$

Exercice 2
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Montrer que $\exists c \in [a,b], \quad f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f.$

Exercice 3
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[)$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. On définit $F : \begin{cases}]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \\ x \mapsto \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt. \end{cases}$

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ell$.

Exercice 4
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 tf(t)dt = 0$.
Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]0,1[$.

Exercice 5
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot$ Montrer que f admet au moins un point fixe dans $[0,1]$.

Exercice 6
Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec g positive.

a) Montrer qu'il existe un réel c dans $[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt \;=\; f(c)\int_a^b g(t)\,dt.$$

b) Soit f continue au voisinage de 0.

(i) Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$.

(ii) Calculer $\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \dfrac{f(t)}{t}dt$.

Exercice 7
Soit f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un réel k positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \leq k\int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 8 (Lemme de Riemann-Lebesgue.)
Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $c_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)e^{-int}\,dt$ soit définie.

a) Montrer que si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, alors la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) Établir un résultat analogue dans le cas où f est une fonction en escalier sur $[a,b]$.

c) Peut-on étendre ce résultat au cas où f est une fonction continue sur $[a,b]$?

Exercice 9
Soient $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^n x^n e^{-nx}dx$. Montrer que (I_n) et (J_n) tendent vers 0.

Exercice 10
Soient $0 < a < b$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \cos(nt^2)dt$.

Exercice 11
Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \left(\displaystyle\int_a^b f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$.
Montrer que la suite (I_n) converge vers $M = \displaystyle\sup_{[a,b]} f(x)$.

Exercice 12
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{1+n}$. En déduire que (I_n) converge vers 0.

b) Trouver une relation de récurrence entre I_{n-2} et I_n pour tout entier $n \geq 2$.

c) Démontrer que l'on a :

$$\forall p \geq 0, \quad I_{2p} = (-1)^p \frac{2(2p)!}{\pi^{2p+1}} + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{(2p)!}{\pi^{2k+1}(2p-2k)!}.$$

Calcul de primitives et d'intégrales

Exercice 13
a) Soit f continue sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b]$, $f(a+b-x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

b) Application : Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$.

Exercice 14

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $t \mapsto t \sin^3 t$;

b) $t \mapsto \sin(\ln t)$;

c) $t \mapsto \dfrac{1}{t + t(\ln t)^2}$;

d) $t \mapsto \dfrac{1}{e^t + 1}$;

e) $t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$;

f) $t \mapsto \dfrac{1}{t^2(t+1)}$;

g) $t \mapsto \dfrac{t^4+1}{t^3-t}$;

h) $t \mapsto \dfrac{1}{t^3-1}$;

i) $t \mapsto \dfrac{t+1}{t^2-t-6}$;

Exercice 15

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$;

b) $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x|dx$;

c) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$;

d) $\displaystyle I_n = \int_1^e t^n ln(t)dx$;

e) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

f) $\displaystyle\int_0^1 x \arctan^2(x)dx$.

Sommes de Riemann

Exercice 16

Déterminer les limites des suites de terme général :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$;

c) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{2^k}$;

d) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+3(k/n)}$.

e) $\displaystyle\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$;

f) $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$;

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 17

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On considère la fonction F définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)dt.$$

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$.

b) Calculer F' et en déduire que $\forall x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)dt\right) du.$

Exercice 18

Sans calculer les intégrales correspondantes, déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{-x}^{x} \sin(t^2)\, dt$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{(\ln t)^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} dt$

Exercice 19
On considère pour tout $x > 0$, la fonction définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall x > 1, |f(x)| \leq \dfrac{2}{x}$. En déduire la limite de f lorsque $x \to +\infty$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$.

Exercice 20
Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ (parité, dérivabilité, limites) ;

b) $g(x) = \displaystyle\int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t}) dt$ (parité, période, dérivabilité, dérivée, valeurs) ;

c) $h(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2(t)} dt$ ($\mathcal{D}_h$, parité, continuité et dérivabilité en 0, $y = x$ asymptote).

Applications des formules de Taylor

Exercice 21
a) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

b) Montrer que pour tout x dans $[0, \pi/2]$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

Exercice 22
Soit x un réel.

a) Montrer que $\sin x = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

b) Montrer que $\cos x = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Exercice 23
Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' soient bornée. On pose $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$.

a) À l'aide d'une formule de Taylor, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

b) En déduire que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$
