TD2

Fonctions de la variable réelle

Inégalités

Exercice 1

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes:

a) $x-1=\sqrt{x+2}$

b) $\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3}<0$

c) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}=1$

d) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x-1}<\dfrac{1}{4x^2}$

e) $|x+4|\leq|2x+1|$

f) $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|\leq 2$

Exercice 2

Démontrer les inégalités suivantes

a) $\forall a,b\in\mathbb{R}, ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$;

b) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}, ab+ac+bc\leq a^2+b^2+c^2$;

c) $\forall a,b\in\mathbb{R}, \frac{1}{2}(\ln(a)+\ln(b))\leq\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Exercice 3

a) Montrer que si x et y sont deux réels positifs tels que $x\geq y$ alors :

$$\sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}\quad\text{et}\quad\sqrt{x}-\sqrt{y}\leq\sqrt{x-y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

b) En déduire que, pour tout x, $y\in\mathbb{R}$:

$$\sqrt{|x+y|}\leq\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\text{ et }\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right|\leq\sqrt{|x-y|}\leq\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$$

Exercice 4

Montrer que pour tout x, $y\in\mathbb{R}$, $|x|+|y|\leq|x+y|+|x-y|$.

Exercice 5

Soient a et b deux réels tels que $0<a\leq b$. Démontrer que :

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\leq(\ln 2)^2.$$

Indication : On pourra introduire la fonction $f:x\mapsto\dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

Exercice 6

Pour $n\geq 1$, on pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a) Montrer que :

$$\forall x \geq 0, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

b) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Parité, périodicité

Exercice 7

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Étudier la parité et la périodicité de $g \circ f$ en fonction de celles de f et de g.

Exercice 8

On considère la fonction : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x)\cos^2(x) \end{array}$

Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et expliquer comment obtenir toute la courbe représentative de f à partir de cette étude.

Exercice 9

Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à la fois monotones et périodiques.

Limites

Exercice 10

Déterminer les limites de :

- $f_1 : x \mapsto \dfrac{1-5x}{5+x}$ en -5, $+\infty$ et $-\infty$
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^4 - 1}$ en 1, $+\infty$ et $-\infty$
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{1+x}}$ en $+\infty$ et $-\infty$
- $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 1} - x + 2$ en $+\infty$
- $f_5 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 9} + x - 3$ en $-\infty$

Exercice 11

a) Calculer la limite en 1 de $f : x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{x - 1}$

b) Calculer la limite en $+\infty$ de $g : x \mapsto x \sin\left(\dfrac{3}{x}\right)$

c) Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \dfrac{\ln(1 + \sin(x))}{x}$

b) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

d) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$

e) Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{x}$

Etude de fonctions

Exercice 12

Etudier le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes:

$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{x^2-3x+2} \qquad f_2 : x \mapsto (\cos x)^3 \qquad f_3 : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} \qquad f_4 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2-x}}$$

$$f_5 : x \mapsto (x+2)e^{3x} \qquad f_6 : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}} \qquad f_7 : x \ln(x^2+1) \qquad f_8 : x \mapsto \sin\left(\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\right)\right)$$

Exercice 13

Etudier et représenter graphiquement $x \mapsto \sqrt{\dfrac{2-2x}{3+x^2}}$.

Est-elle bornée ? Possède t-elle des extrema sur son ensemble de définition?

Exercice 14

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = \dfrac{x+m}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m.

a) Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 0 sont parallèles.

b) Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au pont d'abscisse 1 sont concourantes.

Exercice 15

On pose $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ et on note $\mathcal{C}$ la courbe de f. Montrer que $(1,0)$ est l'unique point de $\mathcal{C}$ dont la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 16

On pose $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Montrer que la fonction f est impaire.

c) Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 17

Faire une étude complète (représentation graphique incluse) des fonctions suivantes:

$$f : x \mapsto \sqrt{|x^2-1|} \qquad g : x \mapsto x^2\sqrt{\ln(|x|)}.$$

Exercice 18
On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0,+\infty[\setminus\{1\}$ par :

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f relativement à un repère orthonormal.

a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures et par valeurs inférieures. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?

b) Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles $[0,1[$, $]1,+\infty[$.

c) Préciser l'équation cartésienne de la tangente (T) au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.

d) Prouver que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$.

Exercice 19
On considère la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f et étudier sa parité.

b) Étudier les variations de la fonction f et préciser ses limites aux bornes de $\mathcal{D}$.

c) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$ admet une application réciproque.

On note g cette application.

d) Donner l'ensemble de définition de g, son ensemble de continuité ainsi que son sens de variation.

e) Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.

f) Expliciter la fonction g.

À chercher

Exercice 20
Montrer que, pour x et y strictement positifs,

$$x\ln x+y\ln y\leq(x+y)\ln(x+y).$$

Exercice 21
On pose $u_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ pour tout nombre entier $n\geq 1$.

a) Prouver l'inégalité $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$ pour tout nombre positif x.

b) Encadrer $\ln(u_n)$, puis déduire les limites de $\ln(u_n)$ et de u_n.

Exercice 22
On pose $f(x)=x^2+\ln x$.

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble à préciser.

On note g son application réciproque.

b) Montrer que g est dérivable sur son ensemble de définition et exprimer g' en fonction de g.
