TD20

Applications linéaires

Applications linéaires - Généralités

Exercice 1

Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

a) $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y,y-z)\end{array}$;

b) $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \mapsto & (4x+y,x-y,2x+3y)\end{array}$;

c) $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^3\\ (u_n) & \mapsto & (u_0,u_1,u_2)\end{array}$;

d) $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X]\\ P & \mapsto & XP'-P\end{array}$;

e) $f:\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\ M & \mapsto & [A,M]=AM-MA\end{array}$ où $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Les applications suivantes sont-elles linéaires :

a) $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (x,xy,y-z)\end{array}$;

b) $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (z,y,\lambda)\end{array}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice 3

Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

a) $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \mapsto & (x-y,y-x,0)\end{array}$;

b) $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y-z,-x+2y+z)\end{array}$

c) $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \to & \mathbb{C}\\ z & \mapsto & z+i\bar{z}\end{array}$;

d) $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X]\\ P & \mapsto & P-(X+1)P'\end{array}$.

Exercice 4

Démontrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$f(1,0,0)=(0,1),\quad f(1,1,0)=(1,0),\quad f(1,1,1)=(1,1).$$

Calculer $f(x,y,z)$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2-5f+6Id_E=0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que :

$$E=Ker(f-2Id_E)\oplus Ker(f-3Id_E).$$

Exercice 6

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$E=Im(f)+Ker(f)\quad\Leftrightarrow\quad Im(f)=Im(f^2);$$

$$Im(f)\cap Ker(f)=\{0_E\}\quad\Leftrightarrow\quad Ker(f)=Ker(f^2).$$

Exercice 7
Soit E un K-espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont stables par g.

Exercice 8
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel usuelle. Montrer que l'application

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z)$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.

Exercice 9
Soit Δ l'application de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta P(X) = P(X + 1) - P(X).$$

a) Préciser le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P.

b) Montrer que Δ est linéaire et préciser son noyau.

c) Montrer que Δ induit un isomorphisme d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}[X]$ à déterminer sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10
Donner une base de l'espace des suites complexes vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

Projecteurs, symétries, homothéties

Exercice 11
On pose $E = \mathbb{R}^3$, $F = Vect((1, 0, 0))$ et $G = Vect((1, 1, 0), (1, 1, 1))$.
Montrer qu'il existe une unique application $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\forall u \in F, f(u) = 2u \quad \text{et} \quad \forall v \in G, f(v) = -v.$$

Déterminer cette application linéaire.

Exercice 12
Soit $E = \mathbb{R}^3$. On pose $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 2, 3)$, $F = Vect(e_1, e_2)$ et $G = Vect(e_3)$.

a) Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E.

b) Donner l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.

c) Donner l'expression de la symétrie s par rapport à G et parallèlement à F.

Exercice 13
Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, $A \neq 0$. On considère l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ qui à P associe R, reste de la division euclidienne de P par A. Montrer que f est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

Exercice 14
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. Montrer que :

a) $Id_E - p$ est un projecteur.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda \neq 1$, $p - \lambda Id_E$ est un automorphisme.

Exercice 15
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E.

a) Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

b) Montrer qu'alors :

$$Im(p+q) = Im(p) \oplus Im(q) \text{ et } Ker(p+q) = Ker(p) \cap Ker(q).$$

Exercice 16
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E. Montrer que :

$$\begin{cases} p \circ q = p \\ q \circ p = q \end{cases} \Leftrightarrow Ker(p) = Ker(q) \quad ; \quad \begin{cases} p \circ q = q \\ q \circ p = p \end{cases} \Leftrightarrow Im(p) = Im(q).$$

Exercice 17
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in GL(E)$ et p un projecteur tel que $f = g \circ p$.

Exercice 18
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E, \quad \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = \lambda_x \cdot x.$$

Montrer que f est une homothétie.

Exercice 19
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Quel est le centre de $GL(E)$?

Rang d'une application linéaire

Exercice 20
Déterminer le rang de des applications linéaires suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-y+z+t, x+2z-t, x+y+3z-t) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+2y-2z, x-3y+11z, -3x+4y-18z) \end{array}$$

Exercice 21
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que :

$$|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g).$$

Exercice 22
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que $rg(g \circ f) \leq \min(rg(g), rg(f))$.

b) Déterminer $rg(f) + rg(g)$ lorsque $f + g \in GL(E)$ et $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 23
Soit u un endomorphisme de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.

Exercice 24
Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f + g = Id_E$ et $rg(f) + rg(g) \leq n$ où $n = \dim(E)$. Montrer que f et g sont des projecteurs.

Exercice 25
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Im(u) = Ker(u)$ si et seulement si n est pair.
Montrer qu'alors pour un tel $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base de E de la forme :

$$(e_1, e_2, \ldots, e_p, u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)).$$

Exercice 26
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F et G des sev de E. Donner une CNS pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Im(u) = F$ et $Ker(u) = G$.

Endomorphismes nilpotents

Exercice 27
Soit E un espace vectoriel de dimension finie tel que $\forall x \in E$, $\exists p_x \in \mathbb{N}$, $u^{p_x}(x) = 0$.
Montrer qu'alors u est un **endomorphisme nilpotent**, c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. On appelle alors **indice de nilpotence de** u le plus petit entier p tel que $u^p = 0$
Ce résultat est-il vrai si on ne suppose plus E de dimension finie ?

Exercice 28
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que $u \circ u = 0_{L(E)}$.

a) Donner un exemple non trivial d'une telle application u pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il existe une application linéaire f de E vers $\mathbb{K}$ et a un élément de E tels que

$$\forall x \in E, \quad u(x) = f(x)a.$$

Exercice 29
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence p. On suppose E de dimension finie n.

a) Soit $x_0 \in E \setminus Ker(f^{p-1})$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.

b) En déduire que $f^n = 0$.

c) Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E)$.
