TD21

Séries numériques

Exercice 14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$ (si la série de terme général u_n converge). Étudier, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de :

a) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ quand la série de terme général u_n diverge.

b) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ quand la série de terme général u_n converge.

Solution.

a) On fait une comparaison à un intégrale, mais sur les intervalles $[S_n, S_{n+1}]$: on suppose $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, si $t \in [S_n, S_{n+1}]$ (la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante car les u_n sont tous > 0), $S_{n+1}^{-\alpha} \leq t^{-\alpha} \leq S_n^{-\alpha}$. En intégrant, il vient :

$$\frac{u_{n+1}}{S_{n+1}^\alpha} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+1}^\alpha} \leq \int_{S_n}^{S_{n+1}} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n^\alpha} = \frac{u_{n+1}}{S_n^\alpha}.$$

Supposons $\alpha > 1$. Si $p \in \mathbb{N}$, en sommant les inégalités précédentes, on a, par Chasles :

$$\sum_{n=0}^{p} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \frac{u_0}{S_0^\alpha} + \int_{S_0}^{S_p} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{u_0}{S_0^\alpha} + \frac{S_0^{1-\alpha} - S_p^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq \frac{u_0}{S_0^\alpha} + \frac{S_0^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

Les sommes partielles de la série de terme général $u_n S_n^{-\alpha}$ sont donc majorées, et cette série converge. Supposons maintenant $\alpha = 1$. Supposons que $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ converge. Pour $n \leq m \in \mathbb{N}$, on a $S_n \leq S_p \leq S_m$ si $p \in [|n, m|]$, donc $\sum\limits_{p=n}^{m} \dfrac{u_p}{S_p} \geq \dfrac{1}{S_m} \sum\limits_{k=n}^{m} u_k = \dfrac{S_m - S_{n-1}}{S_m} = 1 - \dfrac{S_{n-1}}{S_m}$. En faisant tendre m vers $+\infty$ (à n fixé), il vient donc $\sum\limits_{p=n}^{+\infty} \dfrac{u_p}{S_p} \geq 1$. Or le membre de gauche (qui est le reste de la série étudiée) converge vers 0 quand $n \to +\infty$... absurde ! Ainsi $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge.
Enfin, si $\alpha < 1$, on a $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \dfrac{u_n}{S_n}$ (quand n est assez grand pour que $S_n > 1$, ce qui arrive puisque $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$) donc la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge par le critère de comparaison des séries à termes positifs.
En conclusion, $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

b) On fait une comparaison à un intégrale, mais sur les intervalles $[R_{n+1}, R_n]$: on suppose $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, si $t \in [R_{n+1}, R_n]$ (la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car les u_n sont tous > 0), $R_n^{-\alpha} \leq t^{-\alpha} \leq R_{n+1}^{-\alpha}$. En intégrant, il vient :

$$\frac{u_n}{R_n^\alpha} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n^\alpha} \leq \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{R_n - R_{n+1}}{R_{n+1}^\alpha} = \frac{u_n}{R_{n+1}^\alpha}.$$

Supposons $\alpha < 1$. Si $p \in \mathbb{N}$, en sommant les inégalités précédentes, on a, par Chasles :

$$\sum_{n=0}^{p} \frac{u_n}{R_n^\alpha} \leq \int_{R_p}^{R_0} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{R_0^{1-\alpha} - R_p^{1-\alpha}}{1 - \alpha - 1} \leq \frac{R_0^{1-\alpha}}{1 - \alpha}.$$

Les sommes partielles de la série de terme général $u_n R_n^{-\alpha}$ sont donc majorées, et cette série converge.
Supposons maintenant $\alpha = 1$. Supposons que $\sum \frac{u_n}{R_n}$ converge. Pour $n \leq m \in \mathbb{N}$, on a $R_m \leq R_p \leq R_n$ si $p \in [|n, m|]$, donc $\sum_{p=n}^{m} \frac{u_p}{R_p} \geq \frac{1}{R_n} \sum_{k=n}^{m} u_k = \frac{R_n - R_{m+1}}{R_n} = 1 - \frac{R_{m+1}}{R_n}$. En faisant tendre m vers $+\infty$ (à n fixé), il vient donc $\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{u_p}{R_p} \geq 1$. Or le membre de gauche (qui est le reste de la série étudiée) converge vers 0 quand $n \to +\infty$... absurde ! Ainsi $\sum \frac{u_n}{R_n}$ diverge.
Enfin, si $\alpha > 1$, on a $\frac{u_n}{R_n^\alpha} \leq \frac{u_n}{R_n}$ (pour n assez grang pour que $R_n < 1$, ce qui arrive car $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) donc la série de terme général $\frac{u_n}{R_n^\alpha}$ diverge par le critère de comparaison des séries à termes positifs.
En conclusion, $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Exercice 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs.

a) On suppose que $\sum v_n$ converge.

(i) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.

(ii) Si $u_n \sim v_n$, montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

b) On suppose que $\sum v_n$ diverge.

(i) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(ii) Si $u_n \sim v_n$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Solution.

1. On suppose que $\sum v_n$ converge

   (a) Soit $\epsilon > 0$. Comme $u_n = o(v_n)$, par définition de la limite, on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq \epsilon |v_n|$ i.e. $u_n \leq \epsilon v_n$. Soit $n \geq N$. Comme $\sum v_n$ converge, il en est de même de $\sum u_n$ par le critère de comparaison des séries à termes positifs. On peut donc sommer les restes, et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \epsilon v_k = \epsilon \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$. On a donc montré $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.

   (b) Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite, on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \epsilon$, i.e. $(1-\epsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\epsilon)v_n$. En sommant, pour $n \geq N$ (les deux séries étant convergentes par le critère de comparaison des séries à termes positifs), on trouve alors

   $$(1-\epsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leq (1+\epsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

   ce qui montre que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

2. On suppose que $\sum v_n$ diverge.

(a) Soit $\epsilon > 0$. Comme $u_n = o(v_n)$, par définition de la limite on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq \epsilon |v_n|$ i.e. $u_n \leq \epsilon v_n$. Pour $n \geq N$, on a alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} \epsilon v_k \leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \epsilon \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Comme $\sum\limits_{k=0}^{N-1} u_k$ est finie, et comme $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\frac{\sum_{k=0}^{N-1} u_k}{\sum_{k=0}^{n} v_k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $\sum\limits_{k=0}^{N-1} u_k \leq \epsilon \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. Pour $n \geq \max(N, N_1)$, on a donc $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leq \epsilon \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$, et on a montré la définition de $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Exemple de la série harmonique. $S_n = ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o(1/n)$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Avec $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, continue et décroissante, on obtient $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$ i.e. $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$ (en notant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$). Ainsi $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$ et par le théorème des gendarmes, $\frac{S_n}{\ln n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $S_n \sim \ln n$.

- Posons $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$. On désire montrer que (u_n) converge.

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. Pour montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, on va étudier la convergence de la série télescopique $\sum\limits_{n \geq 1}$. On a :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$

  Ainsi, $-v_n \sim \dfrac{1}{2(n+1)^2}$ donc $-v_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$.

  La série de terme général positif $\dfrac{1}{2n^2}$ étant convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2$), on en déduit que $-v_n$ est positif à partir d'un certain rang et que la série de terme général $-v_n$ est convergente. Donc $\sum\limits_{n \geq 1} v_n$ converge puis $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

  Sa limite est notée $\gamma \in \mathbb{R}$ et appelée constante d'Euler. On obtient ainsi une estimation asymptotique des sommes partielles de la série harmonique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

- On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = S_n - \ln n - \gamma$.

$$t_{n+1} - t_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{2n^2} \sim -\frac{1}{2} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}.$$

On a donc $\sum_{k=n}^{+\infty}(t_{k+1}-t_k) \sim -\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2n}$ i.e. $-t_n \sim -\frac{1}{2n}$. Ainsi $t_n \sim \frac{1}{2n}$ et on a :

$$S_n = ln(n) + \gamma + t_n = ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(1/n)$$