TD22

Matrice d'une application linéaire

Matrice d'une application linéaire

Exercice 1

Déterminer les matrices dans les bases canoniques respectives des applications linéaires suivantes:

$$u_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}, \qquad u_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[X] & \to & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array},$$

$$u_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)dt \end{array}, \qquad u_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P+P' \end{array}.$$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM. \end{array}$ Montrer que φ est un endomorphisme et donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 3

Soit $a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Considérons $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{array}$

a) Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$. On note $V(a_0, ..., a_n)$ cette matrice.

b) Montrer que $V(a_0, \dots, a_n)$ est inversible si et seulement si $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $Kerf$ et Imf.

b) Démontrer que ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

c) On pose $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2,-1,-1)$ et $u_3 = (-3,3,0)$. Prouver que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = Kerf \oplus Imf$. Ecrire la matrice de f dans cette base.

d) Ecrire f comme la composée de deux endomorphismes connus.

Exercice 5

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, et $f \in \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer f^2. En déduire que $Im(f) \subset Ker(f)$.

b) Donner rgf et $\dim(Kerf)$ puis déterminer une base du noyau et de l'image de f.

c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (Suite du DS8)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est un endomorphisme cyclique si et seulement si il existe $\mathcal{B}$ une base de E et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice est appelée matrice compagnon.

Changement de base

Exercice 7

Notons $\mathcal{B} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{K}^4$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = ((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Posons $x = (2,-1,3,4)$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 8

On considère la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

c) Soit u l'endomorphisme de dérivation, c'est-à-dire $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P'$. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ puis la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 9

Donner la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur le plan d'équation $x + y - z = 0$ parallèlement à la droite $Vect(1,1,1)$.

Exercice 10

On note $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ u(x,y) = (3x+4y, -x+y, 2x-2y)$$

a) Soit $e'_1 = (3,1)$, $e'_2 = (-2,5)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$.

  i) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

  ii) Donner les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

b) Soit $f'_1 = (-1,0,1)$, $f'_2 = (2,-1,2)$, $f'_3 = (1,-1,1)$ et $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$

  i) Montrer que $\mathcal{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

  ii) Donner les matrices de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ puis de $\mathcal{C}'$ à $\mathcal{C}$.

c) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(u)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$.

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ associé.

a) Montrer que $Ker(u - id_E)$, $Ker(u - 2id_E)$ et $Ker(u + 4id_E)$ sont de dimension 1 et en donner des bases.

b) On se donne e_1, e_2 et e_3 des vecteurs non nuls de chacun des noyaux précédents. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.

c) Donner la matrice D de u dans cette base. Justifier qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ (que l'on explicitera) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 12

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

b) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, puis exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Exercice 13

a) Montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice n, c'est à dire $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = T$ avec

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Soit plus généralement A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = T$ avec T matrice triangulaire supérieure stricte.

Exercice 14 (Décomposition de Fitting)

Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} N & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ où N est une matrice carrée nilpotente et $B \in GL_{n-p}(\mathbb{K})$ est une matrice carrée inversible.

Indication : Penser à la suite des noyaux et images itérés.

Matrices équivalentes et matrices semblables

Exercice 15 (Matrices équivalentes)

Soient n et p des entiers naturels non nuls. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, on rappelle que la matrice A est équivalente à la matrice B, et on note $A \sim B$, s'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ tels que $A = Q^{-1}AP$.

a) Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

b) Soit E et F des espaces vectoriels de dimensions p et n respectivement, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r. Montrer qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F telles que :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{p-r,r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right).$$

c) En déduire que : $A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad rg(A) = rg(B)$.

Exercice 16 (Matrices semblables)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on dit que la matrice A est semblable à la matrice B, et on note $A \approx B$, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

a) Interpréter la relation $A \approx B$ en termes d'endomorphismes : si A est la matrice représentative d'un endomorphisme u dans une base $\mathcal{B}$, à quelle condition (nécessaire et suffisante) a-t-on $A \approx B$?

b) Montrer que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Quelle est la classe d'équivalence de la matrice λI_n pour la relation $\approx$?

d) Montrer que si $A \approx B$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \approx B^k$.

e) Soient A et B telles que $A \approx B$. Montrer que A est inversible si et seulement si B est inversible, et qu'alors $A^{-1} \approx B^{-1}$.

f) Montrer que si A et B sont semblables, alors elles sont équivalentes. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 17
Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 18
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. Déterminer tous les endomorphismes u de E ayant même matrice représentative dans toutes les bases de E.

Exercice 19 (Trace)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application trace $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, A \to \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

a) L'application Tr est-elle linéaire ? Est-elle surjective ? Déterminer une base de $Ker(Tr)$.

b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A-t-on $Tr(AB) = Tr(A)Tr(B)$? $Tr(AB) = Tr(BA)$?

c) Montrer que si A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors elles ont même trace.

d) Montrer que l'on peut définir sans ambiguïté la trace d'un endomorphisme u d'un espace E de dimension finie comme étant la trace de sa matrice représentative dans une base (quelconque) de E.

e) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $p, s \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p^2 = p$ et $s^2 = Id_E$. Calculer $Tr(p)$ et $Tr(s)$.

Rang d'une matrice

Exercice 20
Calculer le rang et l'inverse s'il existe des matrices suivantes ($c \in \mathbb{R}$) :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & c & 2 \\ 2 & c & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme non nul de $\mathbb{K}^n$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'une colonne non nulle.

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(i) Quel est le rang de f ? Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$. Ces sous-espaces sont-ils supplémentaires ?

(ii) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.

Exercice 22
a) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que M est de rang 1 si et seulement s'il existe une matrice colonne non nulle $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice ligne non nulle $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ telles que $M = CL$.

b) Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $u^2 = Tr(u)u$.

(ii) Que peut-on dire de u lorsque sa trace vaut 1 ?

(iii) Montrer que $\mathcal{L}(E)$ possède une base formée de projecteurs.
