TD25

Produit scalaire et espaces euclidiens

Produit scalaire et norme euclidienne

Exercice 1

On considère le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ et on pose pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$:

$$< x, y >= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

b) Représenter la boule unité, c'est à dire l'ensemble des $x \in E$ tels que $||x|| \leq 1$.

Exercice 2

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $\forall x \in E, \quad ||f(x)|| = ||g(x)||$.
Montrer que : $\forall x, y \in E, \quad < f(x), f(y) >=< g(x), g(y) >$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 4

On considère l'espace $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall f, g \in E, \quad < f, g >= f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ définit un produit scalaire sur E.

b) Établir que :

$$\forall f \in E, \quad \left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leq 2\left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2dt\right).$$

Exercice 5

On considère l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on pose : $< M, N >= Tr({}^tMN)$.

a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ définit un produit scalaire sur E.

b) Établir que : $\forall M \in E, \quad (\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,i})^2 \leq n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2$.

c) Montrer que l'orthogonal du sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles est le sous-espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques réelles.

Orthogonalité

Exercice 6

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E, et soit A une partie de E. Montrer que :

$$A^{\perp} = Vect(A)^{\perp} \quad ; \quad F^{\perp} \cap G^{\perp} = (F+G)^{\perp} \quad ; \quad F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}.$$

Montrer l'égalité lorsque E est de plus de dimension finie.

Exercice 7

On considère $E = \{\text{suites réelles nulles à partir d'un certain rang}\}$ et on pose $< u, v >= \sum_{i=0}^{+\infty} u_n v_n$.

On définit $F = \{u \in E | \sum_{i=0}^{+\infty} u_n = 0\}$.

a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est bien défini et est un produit scalaire sur E.

b) Montrer que $F^{\perp} = \{0_E\}$.

c) En déduire que $F \subsetneq \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ et que $F \oplus F^{\perp} \neq E$.

Exercice 8

On pose $u_1 = (0,1,1,1), u_2 = (1,0,1,1), u_3 = (1,1,0,1), u_4 = (1,1,1,0)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. L'orthonormaliser.

Exercice 9

On considère une famille de vecteurs unitaires $(e_1, \ldots, e_p)$ de E espace euclidien de dimension n, vérifiant la relation suivante :

$$\forall v \in E, \quad ||v||^2 = \sum_{i=1}^{p} < e_k, v >^2 .$$

Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormale, puis que c'est une base orthonormale de E. En déduire que $n = p$.

Exercice 10

Soit E un espace euclidien, soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que les matrices de f et g dans une base orthonormée sont respectivement symétrique et antisymétrique. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad < f(x), g(x) >= 0,$$

et

$$\forall x \in E, \quad ||(f-g)(x)|| = ||(f+g)(x)||.$$

Projection orthogonale

Exercice 11

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 12

Soit E un espace euclidien. Soit $u \in E$, $u \neq 0_E$ et soit $H = (Vect(u))^{\perp}$. Soit p la projection orthogonale sur H et s la reflexion par rapport à H.

a) Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad p(x) = x - \frac{< x, u >}{||u||^2} u.$$

b) Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad s(x) = x - 2\frac{< x, u >}{||u||^2} u.$$

Exercice 13

Soit E un espace euclidien.

a) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \quad < p(x), y >=< x, p(y) > .$$

b) Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Montrer que s est une symétrie orthogonale si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \quad < s(x), y >=< x, s(y) > .$$

Exercice 14

Soit p un projecteur de E espace euclidien. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad ||p(x)|| \leq ||x||.$$

Exercice 15

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire.

b) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

c) Calculer le minimum pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de :

$$\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt.$$

Exercice 16
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel.
Soit U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} ||M - aI - bU||.$$

Exercice 17 (Déterminant de Gram)
Soit $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs d'un espace euclidien $(E, < \cdot, \cdot >)$. On définit le déterminant de Gram de ces vecteurs par :

$$Gram(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} < v_1, v_1 > & \dots & < v_1, v_n > \\ \vdots & & \vdots \\ < v_n, v_1 > & & < v_n, v_n > \end{vmatrix}.$$

a) Etablir l'égalité suivante pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $a \in E$:

$$Gram(v_1, \dots, v_p, a) = Gram(v_1, \dots, v_p, a + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p).$$

b) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, $(v_1, \dots, v_p)$ une base de F. Soit $a \in E$. Montrer que :

$$Gram(v_1, \dots, v_p, a) = Gram(v_1, \dots, v_p) d(a, F)^2.$$

Polynômes orthogonaux

Exercice 18
On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on pose :

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Pour tout $0 \leq p \leq n$, on pose $L_p(X) = \dfrac{d^p}{dX^p}(X^p(X-1)^p)$.

a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ définit un produit scalaire sur E.

b) Montrer que L_p est un polynôme dont on précisera son degré et son coefficient dominant.

c) Calculer par intégration par parties $< L_p, L_q >$ pour $p \neq q$. En déduire que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

d) Déterminer enfin la norme euclidienne de L_p.

Exercice 19
L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire défini par :

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

a) Justifier l'existence et l'unicité d'une suite $p_0, \dots, p_n$ telle que :

$$\frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{(X+1)(X+2)\dots(X+n+1)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{p_i}{X+i+1}.$$

b) Montrer que $P(X) = p_0 + p_1 X + \dots + p_n X^n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c) Calculer $< P, X^n >$, montrer que $< P, P >= p_n < P, X^n >$, puis déterminer $||P||$.

d) En déduire la distance δ_n de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 20 (Polynômes orthogonaux)
On considère une fonction continue strictement positive $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$, et on pose :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad < P, Q >= \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)dt.$$

a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Etablir l'existence et l'unicité d'une base orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ tels que $\deg(P_k) = k$ et $< X^k, P_k >> 0$ pour $0 \leq k \leq n$.

En déduire que pour tout $1 \leq k \leq n$, P_i est orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

c) Etablir, pour $0 \leq k \leq n$, qu'il existe a_k, b_k, c_k (avec $c_0 = 0$) tels que :

$$XP_k(X) = a_k P_{k+1}(X) + b_k P_k(X) + c_k P_{k-1}(X).$$

Comparer les deux nombres c_k et a_{k-1}.

d) Montrer que $< P_k, 1 >= 0$ pour $k \geq 1$, puis en déduire que P_k a au moins une racine x_1 appartenant à $]a, b[$ en laquelle il change de signe.

e) On note alors $x_1, \ldots, x_p$ les racines d'ordre impaires de P_k appartenant à $]a, b[$. En considérant le produit scalaire $< P_k, (X - x_1) \ldots (X - x_p) >$, en déduire que nécessairement $p = k$, et que les racines de P_k sont simples, réelles et dans $]a, b[$.

Représentation des formes linéaires et applications

Exercice 21 (Théorème de représentation de Riesz)
On considère un espace euclidien E.

a) Montrer que l'application $v \mapsto \varphi_v =< v, \cdot >$ est un isomorphisme de E dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Ainsi pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) =< v, x > .$$

b) Montrer que H est un hyperplan de E si et seulement si c'est l'orthogonal d'un vecteur non nul.

Montrer que deux hyperplans sont identiques si et seulement s'ils sont orthogonaux à une même droite vectorielle.

Exercice 22 (Adjoint d'un endomorphisme)
On considère un espace euclidien E, et $f \in \mathcal{L}(E)$

a) Montrer que pour tout $y \in E$, il existe un unique vecteur $f^*(y)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad < f^*(y), x >=< y, f(x) > .$$

b) Montrer que l'application $f^* : y \in E \mapsto f^*(y) \in E$ est linéaire. On l'appelle l'adjoint de f.

c) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Quel est l'adjoint de f^* ? de $\lambda f + \mu g$? de $f \circ g$?

d) Montrer que dans toute base orthonormale de E, la matrice de f^* est la transposée de celle de f.

e) Montrer que :
$$Ker(f^*) = Im(f)^{\perp} \quad \text{et} \quad Im(f^*) = Ker(f)^{\perp}.$$

f) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $p = p^*$.

Exercice 23 (Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$)
On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. Montrer l'existence d'un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant :
$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \quad < w, v >= \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, w).$$
Ce vecteur est appelé le produit vectoriel de v_1 et v_2, et noté $v_1 \wedge v_2$.

b) Montrer que l'application $(v_1, v_2) \mapsto v_1 \wedge v_2$ est bilinéaire alternée.

c) Montrer que $v_1 \wedge v_2$ est nulle si et seulement si v_1 et v_2 sont liés.

d) Montrer que si v_1 et v_2 sont linéairement indépendant, alors $v_1 \wedge v_2$ est orthogonal à v_1 et à v_2, de norme égale à $||v_1|| \times ||v_2|| \times \sin(\theta)$ où θ est l'angle non orienté entre v_1 et v_2.

e) Déterminer les coordonnées de $v_1 \wedge v_2$ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de ceux de v_1 et v_2.
