TD5

Primitives

Exercice 1

Déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

1. $x \mapsto e^{3x}\cos 2x$
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
3. $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$
4. $x \mapsto \cos^3(x)$
5. $x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$
6. $\sqrt{x}(1-x)$
7. $x \mapsto \arcsin x$
8. $x \mapsto x\arctan x$
9. $x \mapsto x^\alpha \ln x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
10. $x \mapsto \sin(\ln x)$
11. $x \mapsto x^2\cos(x)$
12. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$
13. $x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$
14. $x \mapsto \dfrac{1}{x^4+1}$
15. $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2-4)^2}$

Exercice 2

A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

1. $x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch} x}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$
4. $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x(e^x+1)}$
6. $x \mapsto \dfrac{3}{x}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (poser $u = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$)
7. $x \mapsto \dfrac{1}{\tan x + 1}$ (poser $u = \tan(x)$)

Exercice 3

Calculer les primitives des fonctions suivantes : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ et $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}$

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $a = Re(\alpha)$, $b = Im(\alpha)$. Montrer que

$$\int \frac{dt}{t-\alpha} = \frac{1}{2}\ln((t-a)^2+b^2) + i\arctan\left(\frac{t-a}{b}\right) + K \quad (K \in \mathbb{C}).$$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin t}{1-t^2}}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^4(t)dt$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2+t+1)e^{-t}dt$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3-1)\mathrm{ch}(t)dt$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2t^2+2t+1}$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}$

Exercice 6

On chercher à calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} dt$.

1. En effectuant le changement de variable $u = \cos t$, montrer que l'on peut écrire $I = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} R(u) du$ où R est une fraction rationnelle.
2. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 7

En posant $t = \tan(x/2)$, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos(x)}$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 - \sin(x)}$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin(x) - \cos(x) + \sqrt{2}}$

Exercice 8

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^t dt$.
2. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire la limite de la suite $(n \times I_n)$.

Exercice 9

On considère la suite (I_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx$$

1. Etablir une formule de récurrence
2. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.

Exercice 10

On considère deux entiers naturels p et q et on pose $I(p, q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1 - t)^q dt$.

1. Etablir une relation de récurrence entre $I(p, q)$ et $I(p + 1, q - 1)$ lorsque $q \geq 1$.
2. En déduire $I(p, q)$ en fonction de $p!$, $q!$ et $(p + q + 1)!$.
3. En déduire une expression factorisée de $\frac{1}{p+1}\binom{0}{q} - \frac{1}{p+2}\binom{1}{q} + \frac{1}{p+3}\binom{2}{q} - \cdots + \frac{(-1)^q}{p+q+1}\binom{q}{q}$.

Exercice 11

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' soit bornée sur $[a, b]$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t) \cos(nt)dt = 0$ (Lemme de Riemann-Lebesgue).
