TD6

Équations différentielles

Exercice 10

On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle d'Euler (E) : $at^2y'' + bty' + cy = f(t)$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ et f une fonction continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

1. Posons $z(x) = y(e^x)$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants en la variable x.

2. Résoudre l'équation d'Euler $t^2y'' + ty' + y = \cos(2\ln(t))$ pour $t > 0$.

Solution

1. On considère y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est donc une fonction deux fois dérivable, qui satisfait :
$$at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t) = f(t).$$
Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $t = e^x$. En reportant dans l'équation précédente, on obtient :
$$ae^{2x}y''(e^x) + be^xy'(e^x) + cy(e^x) = f(e^x).$$
Posons $z(x) = y(e^x)$. z est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$z'(x) = e^xy'(e^x) \text{ et } z''(x) = e^{2x}y''(e^x) + e^xy'(e^x).$$
Dès lors, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si
$$ae^{2x}y''(e^x) + be^xy'(e^x) + cy(e^x) = f(e^x),$$
soit encore en reportant :
$$az''(x) + (b-a)z'(x) + cz(x) = f(e^x).$$

2. On pose donc $z(x) = y(e^x)$. Par ce qu'on a fait précédemment, on est ramené à résoudre l'équation
$$z'' + z = \cos(2x).$$
Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :
$$x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$$
avec $A, B \in \mathbb{R}$. On cherche à présent une solution particulière de l'équation, en utilisant le principe de superposition :
$$(E_1) : z'' + z = \frac{e^{2ix}}{2} \text{ et } (E_2) : z'' + z = \frac{e^{-2ix}}{2}.$$
Pour (E_1), $2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme $z_1(x) = ae^{2ix}$. En reportant on obtient $a = -\frac{1}{6}$, et donc $z_1(x) = -\frac{1}{6}e^{2ix}$.
Une solution particulière de (E_2) s'obtient en prenant le conjugué : $z_2(x) = -\frac{1}{6}e^{-2ix}$.
Finalement une solution particulière de (E) est $z(x) = z_1(x) + z_2(x) = -\frac{1}{3}\cos(2x)$.
Ainsi, les solutions de $z'' + z = \cos(2x)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{3}\cos(2x) + A\cos(x) + B\sin(x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. Et les solutions de l'équation de départ sont les fonctions de la forme $t \mapsto -\frac{1}{3}\cos(2\ln(t)) + A\cos(\ln(t)) + B\sin(\ln(t))$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 12

Soit $(E)\ :\ (1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = (1+x)^3 e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $x \mapsto e^x$ est une solution de l'équation homogène associée.
2. Soit y une solution de (E) et z définie par $y(x) = z(x)e^x$ (on reconnait la méthode de variation de la constante), montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E_1) que l'on résoudra.
3. Donner les solutions de (E).

Solution

On va résoudre l'équation sur $I =]-1, +\infty[$, intervalle sur lequel le coefficient en y'' ne s'annule pas (il faudrait faire un raccordement pour obtenir les solutions sur $\mathbb{R}$...).

1. Il suffit de le vérifier.
2. Soit y une solution de (E) sur I. Alors y est deux fois dérivable sur I, et $z(x) = e^{-x}y(x)$ l'est aussi par produit. Pour tout $x \in I$, on a :

   $$y'(x) = e^x(z(x) + z'(x)) \text{ et } y''(x) = e^x(z(x) + 2z'(x) + z''(x)).$$

   En reportant dans l'équation, on obtient que y est solution de (E) si et seulement si z' est solution de l'équation

   $$(E_1) : (1+x)u' + 2xu = (1+x)^3.$$

   C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, qu'on peut normaliser sur I :

   $$u' + \frac{2x}{1+x}u = (1+x)^2.$$

   Une primitive de $\dfrac{2x}{1+x}$ est $-2\ln(|x+1|) + 2x$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme :

   $$x \mapsto \lambda e^{2\ln(|x+1|)-2x} = \lambda(x+1)^2 e^{-2x}$$

   avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

   On cherche à présent une solution particulière par la méthode de variation de la constante, de la forme $y(x) = \lambda(x)(x+1)^2 e^{-2x}$ avec λ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On a en reportant :

   $$\lambda'(x)(x+1)^2 e^{-2x} = \lambda(x+1)^2$$

   soit $\lambda'(x) = e^{-2x}$. On prend $\lambda(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$, et $y(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2}$.
   Ainsi les solutions de l'équation (E_1) sur I sont :

   $$x \mapsto \lambda(x+1)^2 e^{-2x} + \frac{(x+1)^2}{2}.$$

3. On obtient alors $z'(x) = \lambda(x+1)^2 e^{-2x} + \dfrac{(x+1)^2}{2}$ dont il faut déterminer une primitive. On procède par intégration par parties :

$$
\begin{array}{c|ccc}
+ & (x+1)^2 & & e^{-2x} \\
 & & \searrow & \\
- & 2(x+1) & & -\dfrac{e^{-2x}}{2} \\
 & & \searrow & \\
+ & 2 & & \dfrac{e^{-2x}}{4} \\
 & & \searrow & \\
- & 0 & \xleftarrow{\int} & -\dfrac{e^{-2x}}{8}
\end{array}
$$

Les fonctions $x \mapsto (x+1)^2$ et $x \mapsto e^{-2x}$ sont de classe $\mathcal{C}^3$. On obtient donc :

$$z(x) = \lambda \int (x+1)^2 e^{-2x} + \frac{(x+1)^2}{2} dx \quad = -\lambda \frac{(x+1)^2}{2} e^{-2x} - \lambda \frac{x+1}{2} e^{-2x} - \lambda \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{(x+1)^3}{6} + \mu$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Finalement les solutions de l'équation de départ sur I sont les fonctions $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$:

$$x \mapsto \left(-\lambda \frac{(x+1)^2}{2} e^{-2x} - \lambda \frac{x+1}{2} e^{-2x} - \lambda \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{(x+1)^3}{6} + \mu \right) e^x.$$
