TD6

Équations différentielles

Équations différentielles du 1er ordre

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - \dfrac{2}{x^3}y = 0$ sur $]0, +\infty[$ avec $y(0) = 2$
2. $y' - 2xy = xe^{x^2}$
3. $y' - y\tan x = \cos^2(x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
4. $y' + y = e^{-x} + e^{-2x}$
5. $y' + y = xe^x \cos x$
6. $y' + 2iy = e^{ix}$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $xy' + y = \frac{2x}{x^2+1}$.

1. Résoudre l'équation sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$

Exercice 3

1. Résoudre sur $]0, 1[$ l'équation différentielle $x(x-1)y' + (2x-1)y = 1$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x(x-1)y' + (2x-1)y = 1$

Exercice 4

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante $xy' - 2y - x^4 = 0$.

Exercice 5

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1$.
On pourra introduire la fonction $\varphi(x) = f(x)f(-x)$.

Équations différentielles du 2nd ordre

Exercice 6

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{R}$
2. $y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{C}$
3. $y'' - y' + (1+i)y = 0$
4. $y'' - y' - 2y = x^2 - x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$
5. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
6. $y'' + 2y' + y = \mathrm{sh} x$
7. $y'' + 4y = \sin(x) + \sin(2x)$
8. $y'' - 3y' + 2y = e^x \cos x$
9. $y'' + y = \cos^3 x$

Exercice 7

Déterminer les solutions de $y'' + 2iy = 0$ valant 1 en 0 et de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 8

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' + y = |x| + 1$.

Exercice 9

Soit x et y des fonctions de la variable t. Résoudre les système différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = -7x + y + 1 \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x' = 2tx - y + t\cos(t) \\ y' = x + 2ty + t\sin(t) \end{cases}$

On pourra poser $u = x + y$ et $v = x - y$ pour le système 1, trouver une équation différentielle du second ordre satisfaite par x pour le système 2, et poser $u = x + iy$ pour le système 3.

Exercice 10

On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle d'Euler (E) : $at^2y'' + bty' + cy = f(t)$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ et f une fonction continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

1. Posons $z(x) = y(e^x)$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants en la variable x.
2. Résoudre l'équation d'Euler $t^2y'' + ty' + y = \cos(2\ln(t))$ pour $t > 0$.
3. Résoudre l'équation d'Euler $t^2y'' - 2ty' + 2y = 2t^3\sin(2t)$ pour $t > 0$.

Exercice 11

Résoudre l'équation suivante sur $]-1, 1[$:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0.$$

On pourra poser $x = \sin(t)$.

Exercice 12

Soit (E) : $(1 + x)y'' - 2y' + (1 - x)y = (1 + x)^3e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $x \mapsto e^x$ est une solution de l'équation homogène associée.
2. Soit y une solution de (E) et z définie par $y(x) = z(x)e^x$ (on reconnait la méthode de variation de la constante), montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E_1) que l'on résoudra.
3. Donner les solutions de (E).
4. En utilisant la méthode mise en oeuvre précédement, résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $xy'' + 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 0$ en notant que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution de de cette équation.

Exercice 13

On considère une solution y de l'équation différentielle $ty'' - 2y' - ty = 0$ avec $t > 0$.

1. Montrer que y est indéfiniment dérivable pour tout $t > 0$.
2. En dérivant cette équation, montrer que y vérifie une équation différentielle linéaire du 4^e ordre à coefficients constants.
3. En raisonnant comme pour les équation du second ordre à coefficients constants, résoudre cette équation et en déduire les solutions de l'équation différentielle initiale.

Exercice 14

On considère une fonction indéfiniment dérivable $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ et l'équation $y'' + y = f(x)$. On cherche les solutions y sur $[0, \pi/2]$ vérifiant $y(0) = y(\pi/2) = 0$ et on pose à cet effet :

$$F(x) = -\cos(x) \int_0^x f(t)\sin(t)dt + \sin(x) \int_{\pi/2}^x f(t)\cos(t)dt.$$

1. Préciser les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ vérifiant $y(0) = y(\pi/2) = 0$.
2. On envisage ici les deux cas particulier $f(x) = 1$ et $f(x) = x$.

   Exprimer dans ces deux cas $F(x)$ sans symbole intégral, puis $F''(x) + F(x)$.

   En déduire dans ces deux cas les solutions y de $y'' + y = f(x)$ telles que $y(0) = y(\pi/2) = 0$
3. On revient au cas général. Montrer que F est deux fois dérivable, expliciter $F'(x)$ et $F''(x)$, puis exprimer $F''(x) + F(x)$ en fonction de $f(x)$.

   En déduire les solutions y de $y'' + y = f(x)$ telles que $y(0) = y(\pi/2) = 0$.

Exercice 15

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On définit ϕ par $\phi(x) = f(x) - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt$.

1. Montrer que ϕ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ϕ''.
2. Donner l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2$ satisfaisant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt = x^2$.

Exercice 16

On considère une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = \exp(at)y(-t)$$

avec $a \in \mathbb{R}$ fixé.

1. Montrer que y est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que y vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
3. En déduire toutes les fonctions y de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient la relation précédente sur $\mathbb{R}$.
