TD7

Systèmes linéaires

Exercice 1

Déterminer la matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes aux matrices suivantes. On précisera le rang, le nombre d'inconnues principales et secondaires des systèmes homogènes associés.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x-3y+6z+2t=5 \\ y-2z+t=1 \\ z-3t=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+11y-z=5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y-z+t=2 \\ 2x-2y+z-2t=1 \\ -x+y+z-2t=-2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+6t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x-y+t=3 \\ 4x-3y+z+2t=4 \end{cases}$

Exercice 3

L'espace est rapporté à $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. On considère dans l'espace les trois points $A(-1,2,1), B(1,-6,-1)$ et $C(2,2,2)$. Donner un système d'équations paramétriques du plan $\mathcal{P}$ défini par les points A,B,C, puis une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2. Mêmes questions avec les points $A'(1,1,1)$, $B'(1,2,3)$ et $C'=(4,0,0)$.
3. On considère la droite $\mathcal{D}$ $\begin{cases} x+y-3z=-6 \\ -2x-4y+3z=-1 \end{cases}$. Donner une écriture paramétrique de $\mathcal{D}$.

Exercice 4

L'espace est rapporté à $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Discuter, suivant les valeurs de $m\in\mathbb{R}$, l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\begin{cases} mx+2y+3z=3 \\ (m-1)x+my+z=1 \end{cases}$ et du plan $\mathcal{P}$ d'équation $(m+1)x+my+(m-1)z=m-1$.

Exercice 5

Déterminer les valeurs de $m\in\mathbb{R}$ pour lesquelles le système suivant admet des solutions non nulles. Donnez alors les solutions sous forme paramétrique et géométrique.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1+m & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants, en discutant suivant les valeurs des paramètres a et b ou m

1. $\begin{cases} 2x+y-3z=a \\ 3x+2y+z=a+3 \\ 7x+4y-5z=2a+5 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} mx+y+z+t=1 \\ x+my+z+t=m \\ x+y+mz+t=m+1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^3z=1 \end{cases}$

Exercice 7

Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avec $a\neq b$. On considère le système suivant, d'inconnues $x,y,z,t\in\mathbb{R}$:

$$(S)\ \begin{cases} x+ay+z+bt=1 \\ ax+a^2y+bz+b^2t=c \\ a^2x+a^3y+b^2z+b^3t=c^2 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est non vide si et seulement si $c\in\{a,b\}$.

Exercice 8

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a\in\mathbb{R}$ pour qu'il existe une même droite contenue dans les trois plans définis par les équations suivantes :

$$\begin{array}{lcl} (P_1) & : & (1-a)x-2y+z=0 \\ (P_2) & : & 3x-(1+a)y-2z=0 \\ (P_3) & : & 3x-2y-(1+a)z=0 \end{array}$$

Exercice 9

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{K}^n$, on note $\mathcal{S}_b$ le système dont la matrice est A et les seconds membres $b_1,\dots,b_n$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $b\in\mathbb{K}^n$, $\mathcal{S}_b$ est de rang n.
2. Pour tout $b\in\mathbb{K}^n$, $\mathcal{S}_b$ admet au moins une solution.
3. Pour tout $b\in\mathbb{K}^n$, $\mathcal{S}_b$ admet au plus une solution.
4. Le système $\mathcal{S}_0$ n'admet que $(0,\dots,0)$ comme solution.

Exercice 10

Soit $u_1,\dots,u_n\in E=\mathbb{K}^n$. On suppose que pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, si $\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_i=(0,\dots,0)$, on a $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$. Montrer que pour tout $v\in E$, il existe un unique $(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $v=\sum_{i=1}^{n}\mu_iu_i$.

Exercice 11

Soit $u_1,\dots,u_p\in E=\mathbb{K}^n$. Si $p>n$, montrer qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p\backslash\{(0,\dots,0)\}$ tel que $\sum_{i=1}^{p}\lambda_iu_i=0$. En déduire que l'un des vecteurs u_k s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Exercice 12

On considère un système linéaire $\mathcal{S}$ de n équations à p inconnues vérifiant la propriété $\mathcal{P}$: aucune équation du système homogène associé n'est combinaison linéaire des autres.

1. Montrer que si l'on applique une opérations élémentaire à $\mathcal{S}$, le système obtenu vérifie encore la propriété $\mathcal{P}$.
2. En déduire que tout système équivalent à $\mathcal{S}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
3. Montrer que le système est de rang n, que peut-on dire de l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$?
4. Déduire de ce qui précède que dans un système $\mathcal{S}$ incompatible, l'une des équations du système homogène associé est combinaison linéaire des autres.
