TD8

Ensembles et applications

Ensembles

Exercice 1

Montrer les égalités suivantes :

$$]-1,1[=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right] \quad \text{et} \quad [-1,1]=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right[$$

Exercice 2

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. Comparer les ensembles suivants :

a) $\mathcal{P}(A\cup B)$ et $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$;

b) $\mathcal{P}(A\cap B)$ et $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$.

Exercice 3

Soit E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E. Montrer que :

a) $A\subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A)\subset\mathcal{P}(B)$

b) $A\cup B = A\cap C \Leftrightarrow B\subset A\subset C$;

c) $A\cup B = A\cap B \Leftrightarrow A=B$;

d) $A\cap B = A\cap C$ et $A\cup B = A\cup C \Leftrightarrow B=C$;

e) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C) = A\setminus(B\cap C)$;

f) $(A\setminus B)\setminus(A\setminus C) = (A\setminus B)\cap C = (A\cap C)\setminus B$.

Exercice 4

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On pose $A\Delta B := (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ la différence symétrique entre A et B.

a) Montrer que : $\forall A,B\in\mathcal{P}(E)$, $A\Delta B = B\Delta A$, $\quad A\Delta\emptyset = A$, $\quad A\Delta A=\emptyset$.

b) Montrer que : $\forall A,B\in\mathcal{P}(E)$, $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$.

c) Montrer que : $\forall A,B,C\in\mathcal{P}(E)$, $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B=C$.

Exercice 5

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations suivantes :

a) $X\cup A = B$

b) $X\cap A = B$

Exercice 6

Soit E un ensemble, n un entier naturel non nul et $A_0, A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles de E tels que

$$\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = E.$$

On pose pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $B_k = A_k\setminus A_{k-1}$. Montrer que $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ est une partition de E.

Applications

Exercice 7

Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E.

a) Déterminer les fonctions caractéristiques de $\overline{A}, A \cap B, A \cup B$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.

b) Retrouver, à l'aide des fonctions indicatrices, que $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 8

Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

a) $f_1 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}_+, x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$;

b) $f_2 : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+, x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$;

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - y, -2x + 2y)$;

d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$;

e) $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y^2$;

f) $f_6 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 9

$E = F = \mathbb{N}$. On définit f par : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 2n$; puis g par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(2n) = n \text{ et } g(2n + 1) = 0.$$

f et g sont-elles injectives ? surjectives ? Calculer $g \circ f$ puis $f \circ g$. Conclusion ?

Exercice 10

On définit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$.
Résoudre $f(x) = y$. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 11

Soit $P := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$. On considère l'application définie par $h(z) := \dfrac{z - i}{z + i}$.

a) Montrer que l'application h est bien définie sur P à valeurs D.

b) Prouver que h est une application bijective de P vers D et déterminer h^{-1} la réciproque de h.

Exercice 12

Montrer que l'application $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$, $(m, n) \mapsto 2^m (2n + 1)$ est bijective.

Exercice 13

Soit E et F deux ensembles. Montrer qu'il existe une application injective de E dans F si et seulement si il existe une application surjective de F dans E.

Exercice 14

Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On considère l'application $h : E \to F \times G$ définie par :

$$\forall x \in E, h(x) = (f(x), g(x)).$$

a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

b) On suppose f et g surjectives, h est-elle surjective ?

Exercice 15
Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

a) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

b) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

c) Dans le cas où f est bijective, déterminer son application réciproque.

Exercice 16
Soit E un ensemble et f une application de E vers E.

a) Supposons que $f \circ f = f$. Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

b) Supposons que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 17
Etant données trois applications $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to E$, établir que :

a) si deux applications $g \circ f, h \circ g, f \circ h$ sont bijectives, la troisième l'est aussi.

b) si deux des applications $f \circ g \circ h, g \circ h \circ f, h \circ g \circ f$ sont injectives (resp. surjectives) et la troisième est surjective (resp. injective), alors f, g, h sont bijectives.

Image directe, image réciproque

Exercice 18
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) := \cos x$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$f(\mathbb{R}),\ f([0,\pi]),\ f([-\pi/2,\pi/2]),\ f^{-1}(\{0\}),\ f^{-1}(\{\sqrt{3}/2\}),\ f^{-1}([0,1])$$
$$f^{-1}(f(\{0\}),\ f(f^{-1}(\{0\}),\ f^{-1}(f([0,\pi/2])),\ f(f^{-1}([0,1])).$$

Exercice 19
Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

1. Montrer que, si A, B et C sont des parties de F, alors

$$f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C),$$
$$f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C),$$
$$f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c.$$

2. Soient M et N des parties de E.

(a) Montrer que
$$f(M \cup N) = f(M) \cup f(N),$$
$$f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N).$$
Donner un exemple où $f(M \cap N) \neq f(M) \cap f(N)$.

(b) On suppose que f est une injection. Montrer que $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$.

(c) Montrer que, si pour tout couple (M, N) de parties de E, on a $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$, alors f est injective.

Exercice 20
Soit E et F deux ensembles, et f une application de E vers F.

1. Montrer qu'on a $\forall A \subseteq E, A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout $A \subseteq E, A = f^{-1}(f(A))$.
3. Montrer qu'on a $\forall B \subseteq F, f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour tout $B \subseteq F, B = f(f^{-1}(B))$.

Exercice 21
Soit E et F deux ensembles, et f une application de E vers F. On considère les applications :
$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F) & \to & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B). \end{array} \right.$$

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   (a) f est injective ; | (b) ϕ est injective ; | (c) φ est surjective.

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   (a) f est surjective ; | (b) ϕ est surjective ; | (c) φ est injective.

Relations d'équivalence

Exercice 22
Soit E et F deux ensembles et f une application de E vers F. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E en posant :
$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y).$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E. Décrire les classes d'équivalence de cette relation.

Exercice 23
On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ par
$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x - y.$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Soit x un élément de $\mathbb{R}$. Déterminer la classe d'équivalence de x.
