TD9

Ensembles usuels de nombres

Nombres entiers, décimaux, rationnels

Exercice 1
Soit $(a,b) \in \mathbb{Q}_+^2$ tels que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2
Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$. Montrer que $\dfrac{ax+b}{cx+d} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3
On considère un homomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire une application non nulle f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$.

1. Montrer que $f(1) = 1$, puis que $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{N}$, pour $x \in \mathbb{Z}$ et pour $x \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $f(x^2) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que f est croissante.
3. Montrer que $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$ à l'aide de suites de rationnels convergeant vers x.

Borne supérieure

Exercice 4
Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

1. $\left\{ \dfrac{n+5}{n+1} \ ; n \in \mathbb{N} \right\}$
2. $\left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \ ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$
3. $\{\sqrt{x} - E(\sqrt{x}) \ ; x \in \mathbb{N}\}$

Exercice 5
1. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que, si $A \subset B$, alors $\sup(A) \leq \sup(B)$.
   (b) Montrer que $A \cup B$ est admet une borne supérieur et déterminer $\sup(A \cup B)$
   (c) Montrer que $A \cap B$ est majorée. Peut-on déterminer $\sup(A \cap B)$?
2. On suppose désormais que A et B sont deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.
   (a) On note $-A = \{-x, x \in A\}$. Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
   (b) On pose $AB = \{xy, x \in A, y \in B\}$. A t-on $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$?

Exercice 6
Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. On appelle diamètre de A et on note $\delta(A)$ le réel

$$\sup\{|x-y| \ ; (x,y) \in A^2\}.$$

1. Justifier l'existence de $\delta(A)$

2. Montrer que $\delta(A) \leq \sup(A) - \inf(A)$.
3. Montrer que : $\forall \epsilon,\ \exists (x,y) \in A^2,\ |x-y| > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon$
4. Conclure

Exercice 7
Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction croissante.

1. Montrer que $\{x \in [a,b]\ ;\ f(x) \geq x\}$ admet une borne supérieure s dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(s) \geq s$.
3. Montrer que s est un point fixe de f $(f(s) = s)$.
4. Donner un exemple de fonction décroissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ sans point fixe.

Exercice 8
Déterminer les ensembles :

$$I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1, \frac{1}{n}\right], \quad J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[, \quad K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[.$$

Exercice 9
Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \cap J \neq \emptyset$, montrer que $I \cup J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Partie entière

Exercice 10
Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$,
2. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 11
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 12

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$.
2. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\lfloor x \rfloor = \displaystyle\sum_{k\geq 0} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$ après avoir donné un sens à cette somme.
