Chapitre 12

Calcul matriciel

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
mansuy.mathieu@hotmail.fr

1 Ensemble des matrices

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ou des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1.1 Définitions

Définition.

Soient n et p deux entiers ≥ 1.

- On appelle **matrice** à n **lignes** et p **colonnes** ou **matrice** $n \times p$ tout tableau de np éléments de $\mathbb{K}$ rangés sur n lignes et p colonnes. Les éléments constituant une matrice $n \times p$ sont appelées **coefficients** de la matrice et les entiers n et p sont les **dimensions de la matrice**.

- Si A est une matrice $n \times p$, on notera $a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$ le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne et on écrira :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

  S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de lignes et le nombre de colonnes, on pourra noter plus simplement $A = (a_{i,j})$.

- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$. La matrice A est de dimension 2×3 et on a par exemple :$a_{1,2} = 0,\ a_{2,3} = 5$.

Exemple. Matrices élémentaires.
Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit pour tout $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ la matrice notée $E_{i,j}$ suivante :

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

où l'unique coefficient non nul égal à 1 est en position (i, j). Les $n \times p$ matrices $E_{i,j}$ sont appelées **matrices élémentaires**.

Définition.

- Toute matrice $n\times 1$ est appelée **matrice colonne** et toute matrice $1\times p$ est appelée **matrice ligne**. On identifie les matrices 1×1 avec $\mathbb{K}$.

- La **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n,p}$, ou 0_n si $n = p$.

- La **matrice identité d'ordre** n est la matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, les autres étant égaux à 0. Cette matrice est notée I_n.

1.2 Opérations sur les matrices

Addition et produit par un scalaire

Définition.

- Si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit la matrice $A + B$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ [A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j}.$$

- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ est un scalaire, on définit la matrice λA de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ [\lambda A]_{i,j} = \lambda [A]_{i,j}.$$

Remarque. L'addition de deux matrices de dimensions différentes n'est pas définie.

Exemple.

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Propriété 1 (de l'addition)

L'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

(1) est **associative** : $\forall\ (A,B,C) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2,\ (A+B)+C = A+(B+C)$.
La somme de trois matrices A, B, C pourra ainsi être notée $A+B+C$ sans parenthèses.

(2) est **commutative** : $\forall\ (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2,\ A+B = B+A$.

(3) admet pour **élément neutre** la matrice nulle $0_{n,p}$: $\forall\ A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ 0_{n,p} + A = A + 0_{n,p} = A$.

(4) est telle que tout élément admet un **inverse** : $\forall\ A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \exists\ B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B + A = A + B = 0$. Cet inverse est unique, c'est $B = -A$.

Preuve. Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(1) Pour tout $(i,j) \in [|1,n|] \times [|1,p|]$, on a :

$$[A+(B+C)]_{i,j} = a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j} = [(A+B)+C]_{i,j}.$$

Donc $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(2) Pour tout $(i,j) \in [|1,n|]\times[|1,p|]$, $[A+B]_{i,j} = a_{i,j}+b_{i,j} = b_{i,j}+a_{i,j} = [B+A]_{i,j}$. Donc $A+B = B+A$.

(3) Pour tout $(i,j) \in [|1,n|] \times [|1,p|]$, $[A + 0_{n,p}]_{i,j} = a_{i,j} + 0 = a_{i,j}$. Donc $A + 0_{n,p} = A$. Par commutativité de $+$, $0_{n,p} + A = A$.

(4) Posons $B = -A$. Alors pour tout $(i,j) \in [|1,n|] \times [|1,p|]$, $[A + B]_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,j} = 0$. Donc $A + B = 0_{n,p}$. Par commutativité de $+$, $B + A = 0_{n,p}$. Enfin, si B' est un autre inverse de A, on a par associativité de $+$:

$$B = (B' + A) + B = B' + (A + B) = B'.$$

□

Propriété 2 (du produit par un scalaire)

(1) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\urcorner))^2,\ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$

(2) $\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$

(3) $\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$

Preuve. La preuve est analogue à la proposition précédente et laissée en exercice. □

Produit de deux matrices

Définition.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on définit la matrice $C = A \times B$ de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!],\ [C]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,j}$$

Remarque.

- Pour calculer le coefficient $[C]_{i,j}$, on procèdera selon le schéma ci-dessous (où l'on a représenté en gras les coefficients de A et B utiles au calcul de $c_{i,j}$) :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \mathbf{b_{1,j}} & \cdots & b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & \mathbf{b_{k,j}} & \cdots & b_{k,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & \mathbf{b_{p,j}} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{i,1}} & \cdots & \mathbf{a_{i,k}} & \cdots & \mathbf{a_{i,p}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & \mathbf{c_{i,j}} & \cdots & c_{i,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,j} & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix} \end{array}$$

- Pour pouvoir effectuer le produit de A par B, il faut impérativement que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B.

Exemple. On considère les matrices A, B, C suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer, s'ils sont définis, les produits deux à deux de ces matrices.

Remarque. Considérons le système linéaire à n équations et p inconnues suivant :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$

On avait introduit alors la matrice des coefficients associée au système $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$, la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ des seconds membres, et la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ des inconnues. Avec le produit matriciel introduit ici, le système $(\mathcal{S})$ précédent se réécrit ici sous la forme $AX = B$. Ainsi, le p-uplet $(x_1; \dots ; x_p) \in \mathbb{K}^p$ est solution du système $(\mathcal{S})$ si et seulement si X est solution de l'équation matricielle $AX = B$.

Remarques.

- Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est une matrice colonne, et si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors AX est la matrice colonne :
$$AX = x_1C_1 + \cdots + x_pC_p,$$
où C_i sont les colonnes de la matrice A. AX est donc une combinaison linéaire des colonnes de A.

- De même, si $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, alors XA est la matrice ligne :
$$XA = x_1L_1 + \cdots + x_nL_n,$$
où L_j sont les lignes de la matrice A.

- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. La j-ième colonne de AB est le produit de A par la j-ème colonne de B $(1 \leq j \leq q)$. La i-ème ligne de AB est le produit de la i-ième ligne de A par B $(1 \leq i \leq n)$.

Propriété 3 (du produit matriciel)

(1) Le produit matriciel est **associatif** :
$$\forall\ (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ (AB)C = A(BC).$$
Ainsi, le produit de trois matrices A, B et C pourra être noté ABC sans parenthèses.

(2) Le produit matriciel est **distributif** par rapport à l'addition :
$$\forall\ (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ A(B + C) = AB + AC,$$
et
$$\forall\ (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (A + B)C = AC + BC.$$

(3) $\forall\ (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda(A\times B) = (\lambda A)\times B) = A\times(\lambda B)$.

(4) Pour toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}$, on a:
$$I_n \times A = A \ \text{ et } \ A \times I_p = A,$$
$$0_n \times A = 0_{n,p} \ \text{ et } \ A \times 0_p = 0_{n,p}$$

Preuve. Montrons l'associativité du produit matriciel (les autres points se démontrent de la même façon). Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ et $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq r}}$ des matrices. Alors $A \times (B \times$

$C), (A \times B) \times C \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, et pour tout $(i,l) \in [|1,n|] \times [|1,r|]$, on a :

$$[A \times (B \times C)]_{i,l} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}[B \times C]_{j,l} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \sum_{k=1}^{q} b_{j,k}c_{k,l} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{i,j}b_{j,k}c_{k,l}$$

et

$$[(A \times B) \times C]_{i,l} = \sum_{k=1}^{q}[A \times B]_{i,k}c_{k,l} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k}c_{k,l} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{i,j}b_{j,k}c_{k,l}$$

Donc $(AB)C = A(BC)$. □

Remarques.

1. Le produit matriciel **n'est pas commutatif**, comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Contrairement à ce qui se passe pour la multiplication dans $\mathbb{K}$, on peut avoir $AB = 0_{n,q}$ avec $A \neq 0_{n,p}$ et $B \neq 0_{p,q}$. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice. Produit de matrices élémentaires dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
Montrer les formules suivantes :

$$E_{i,k} \times E_{l,j} = \delta_{k,l}E_{i,j}$$

où $\delta_{k,l}$ est le symbole de Kronecker : $\delta_{k,l} = 1$ si $k = l$, 0 si $k \neq l$.

- Les lignes de $E_{i,k}$ sont nulles, sauf la i^{eme}. Donc les lignes de $E_{i,k} \times E_{l,j}$ sont nulles, sauf peut-être la i^{eme}.
- Les colonnes de $E_{l,j}$ sont nulles, sauf la j^{eme}. Donc les colonnes de $E_{i,k} \times E_{l,j}$ sont nulles, sauf peut-être la j^{eme}.
- Le seul coefficient de $E_{i,k} \times E_{l,j}$ qui peut être non nul est donc en position (i,j), et c'est le produit de la i^{eme} ligne de $E_{i,k}$ et de la j^{eme} colonne de $E_{l,j}$. Il vaut donc 1 si $k = l$, et 0 sinon.

Transposée d'une matrice

Définition.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice notée ${}^tA$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et définie par :

$$\forall\ (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ [{}^tA]_{i,j} = a_{j,i}.$$

Autrement dit, ${}^tA$ est obtenue à partir de A par échange des lignes et des colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & & & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad ; \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,p} & & & a_{n,2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Exemple. Calculer la transposée de $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Propriété 4 (de la transposition)

(1) $\forall\ A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^t\left({}^tA\right) = A$.

(2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ \forall\ (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB$.

(3) $\forall\ A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

Preuve. Les deux premières formules sont immédiates à établir. Montrons la troisième formule. Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ deux matrices. Alors $A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est donnée par :

$$\forall\ (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

Ainsi ${}^t(A \times B)$ est une matrice de type (q, n) telle que $\forall\ (j, i) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, n]\!]$, $[{}^t(A \times B)]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k}b_{k,i}$.
D'autre part, ${}^tB \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, donc la matrice ${}^tB \times{}^t A$ est bien définie et de type (q, n) également. De plus on a pour tout $(j, i) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, n]\!]$:

$$[{}^tB \times{}^t A]_{j,i} = \sum_{k=1}^{p} [{}^tB]_{j,k}[{}^tA]_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j}a_{i,k}.$$

Ainsi on a bien ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$. □

1.3 Matrices carrées

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition.

Lorsque $n = p$, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ des matrices de type $(n \times n)$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et ses éléments sont alors appelés **matrices carrées d'ordre** n.

Propriété 5

L'addition matricielle et le produit matriciel sont des **lois de compositions internes** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \times B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque. Rappelons que :

- l'addition est associative, commutative, et qu'elle admet un élément neutre qui est la matrice nulle 0_n ;
- le produit est associatif, distributif par rapport à l'addition, et qu'il admet pour élément neutre I_n

On dit alors que l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ munie de l'addition, du produit par un scalaire et du produit matriciel est une algèbre. Cette algèbre est non commutative : en général,$A \times B \neq B \times A$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, il existe des diviseurs de zéros dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (on dit aussi que l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre) : $A \times B = 0_n \not\Rightarrow A = 0_n$ ou $B = 0_n$.

Matrices carrées particulières

Définition.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- A est dite **diagonale** si pour tous $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$.
- A est dite **triangulaire supérieure** (resp. **triangulaire supérieure stricte**) si, pour tous i et j tels que $i > j$ (resp. $i \geq j$), $a_{i,j} = 0$, c'est-à-dire si tous les coefficients situés en dessous de la diagonale sont nuls.
- A est dite **triangulaire inférieure** si, pour tous i et j tels que $i < j$ (resp. $i \leq j$), $a_{i,j} = 0$, c'est-à-dire si tous les coefficients situés au dessus de la diagonale sont nuls.

Exemples. Les matrices A et B suivantes sont respectivement triangulaire supérieure et triangulaire inférieure stricte :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. La transposée d'une matrice triangulaire supérieure (stricte) est une matrice triangulaire inférieure (stricte). Une matrice diagonale est égale à sa transposée.

Propriété 6

Le produit de deux matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures (strictes), resp. triangulaires inférieures (strictes)) est diagonale (resp. triangulaire (stricte)). De plus, les coefficients diagonaux de AB sont les produits des coefficients diagonaux de A et de B.
On a ainsi (cas des matrices triangulaires supérieures) :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & \cdots & \\ 0 & a_{2,2} & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1} & & \cdots & \\ 0 & b_{2,2} & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & & \cdots & \\ 0 & a_{2,2}b_{2,2} & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Preuve. Montrons cette proposition lorsque $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont triangulaires supérieures, i.e. telles que $1 \leq j < i \leq n$, $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$. Pour tout $1 \leq j < i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} [A \times B]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times b_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

car pour la deuxième somme $k \leq i > j$ et donc $b_{k,j} = 0$. Donc $A \times B$ est bien triangulaire supérieure. De plus, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned}[A \times B]_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} b_{k,i} + a_{i,i} b_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times b_{k,j} + a_{i,i} b_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k} \times 0 = a_{i,i} b_{i,i}.\end{aligned}$$

Si A et B sont triangulaires inférieures, alors ${}^tB$ et ${}^tA$ sont triangulaires supérieures. Donc ${}^tB \times^t A$ est triangulaire supérieure par ce qu'on a fait. On obtient finalement que $AB =^t ({}^tB \times^t A)$ est triangulaire inférieure.
Enfin, puisqu'une matrice est diagonale si et seulement si elle est triangulaire supérieure et inférieure, le résultat en découle directement pour les matrices diagonales. □

Définition.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- On dit que A est **symétrique** si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire ${}^tA = A$.
- On dit que A est **antisymétrique** si elle est égale à l'opposée de sa transposée, c'est-à-dire ${}^tA = -A$.

On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{AS}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique, la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque.

- La diagonale d'une matrice antisymétrique est toujours nulle.
- Les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{AS}_n(\mathbb{K})$ sont stables par combinaison linéaire, mais ils ne sont pas stables par produit : par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{K}).$$

Exercice. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Puissance d'une matrice carrée

Définition.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **puissance k-ième** de A la matrice, notée A^k, définie par:

- Si $k = 0$, $A^0 = I_n$.
- Si $k = 1$, $A^1 = A$.
- Si $k \geq 2$, $A^k = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}$

Remarque. On a pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $A \times A^k = A^k \times A$. Ainsi A commute avec toutes les puissances de A. Elle commute en particulier avec tout polynôme en A (i.e. toute combinaison linéaire de puissances de A).

Exemple. Considérons la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ définie par:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer, pour tout entier naturel k, la matrice A^k.

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A^2 = 5A - 4I_3$.

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$.

c) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par α_p et β_p. En déduire α_p et β_p en fonction de p.

d) En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Propriété 7 (Puissance d'une matrice triangulaire ou diagonale)

Soit A une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, diagonale). Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, diagonale). De plus, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les coefficients diagonaux de A, on a :

$$A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & \cdots & \\ 0 & \lambda_2^p & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & (*) & \ddots & 0 \\ & \cdots & & \lambda_n^k \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Remarques.

- Il est donc particulièrement facile de calculer les puissances d'une matrice diagonale : il suffit de prendre les puissances des termes diagonaux.
- On peut avoir $A^k = 0_n$ avec $A \neq 0_n$. Par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$ et $A^{p-1} \neq 0_n$. Cet entier p est unique et s'appelle l'ordre de nilpotence de la matrice.

Exemple.

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'ordre 2.

- La matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'ordre 4.

Remarques.

- Plus généralement, on peut montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure **stricte** ou triangulaire inférieure **stricte** est nilpotente d'ordre $\leq n$.

- De même que pour les matrices diagonales, le calcul des puissances d'une matrice nilpotente A est aisé : en effet, pour tout $k \geq p$, $A^k = 0_n$, et il suffit donc de calculer un nombre fini de puissances de A.

Propriété 8 (Formule du binôme de Newton)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent**, c'est-à-dire telles que $AB = BA$. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}.$$

Preuve. La preuve se fait de même que dans le cas complexe. □

► *La formule du binôme de Newton, valable pour deux matrices qui commutent, permet dans certains cas de calculer la puissance d'une matrice.*

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2 Opérations élémentaires de pivot et calcul matriciel

2.1 Matrices d'opérations élémentaires

Définition.

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'une matrice l'une des trois opérations suivantes :

- Multiplication d'une ligne L_i par un scalaire λ non nul ce que l'on note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

- Échange des lignes L_i et L_j avec $i \neq j$ ce que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$;

- Ajout de $\beta \dot{L}_j$ à L_i avec $i \neq j$ ce que l'on note $L_i \leftarrow L_i + \beta\lambda L_j$ où $\beta \in \mathbb{K}$.

Définition.

Soient $1 \leq i, j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les **matrices d'opérations élémentaires** suivantes. On appelle

- **matrice de dilatation** toute matrice carrée $D_i(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme suivante :

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

- **matrice de transposition** toute matrice carrée $P_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme suivante :

$$P_{i,j} = (I_n - E_{i,i} - E_{j,j}) + E_{i,j} + E_{j,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

- **matrice de transvection** toute matrice carrée $T_{i,j}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme suivante :

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & \lambda & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple. Pour $n = 2$, on a :

$$D_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad ; \quad P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad T_{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan

Propriété 9

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(1) $D_i(\lambda)A$ est la matrice obtenue en appliquant $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à A.

(2) $P_{i,j}A$ est la matrice obtenue en appliquant $L_i \leftrightarrow L_j$ à A.

(3) $T_{i,j}(\lambda)A$ est la matrice obtenue en appliquant $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à A.

Preuve. Il suffit de le vérifier directement. Montrons le par exemple pour le produit $T_{1,2}(\lambda) \times A$ (le raisonnement général se faisant de la même façon) :

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \\ 0 & 1 & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + \lambda a_{2,1} & a_{1,2} + \lambda a_{2,2} & \cdots & a_{1,p} + \lambda a_{2,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

□

Remarque. $T_{i,j}(\lambda) = T_{i,j}(\lambda) \times I_n$, ainsi $T_{i,j}(\lambda)$ est la matrice obtenue en appliquant $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à I_n. Cette remarque permet de retrouver l'expression de $T_{i,j}(\lambda)$. On peut bien sûr faire la même remarque pour les matrices $D_i(\lambda)$ et $P_{i,j}$.

Théorème 10

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E produit de matrices d'opérations élémentaires, et une unique matrice échelonnée réduite par lignes R telles que $E \times A = R$.

Preuve. Nous avions montré le résultat suivant :

> Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente par lignes à une matrice échelonnée réduite par lignes (qui est de plus unique).

Ainsi, il existe une unique matrice R échelonnée réduite par lignes telle que $A \underset{\mathcal{L}}{\sim} R$. De plus, on passe de A à R par opérations élémentaires sur les lignes de A, en suivant par exemple l'algorithme de Gauss-Jordan. D'après la proposition précédente, chaque étape de l'algorithme correspond à multiplier à gauche par une matrice de dilatation, de permutation ou de transvection. À la fin de l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient donc :

$$E \times A = R,$$

où la matrice E est un produit de matrices d'opérations élémentaires. □

Exemple. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à A.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow \frac{3}{17}L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et :

$$E = T_{2,3}(-1/3) \times T_{1,3}(1/3) \times D_3(3/17) \times T_{3,2}(5) \times T_{1,2}(-1) \times D_2(1/3) \times T_{3,1}(3) \times T_{2,1}(2) \times P_{1,2}$$

2.3 Opérations sur les colonnes

Définition.

On dira que deux matrices A et A' sont équivalentes en colonnes si on peut passer de la matrice A à la matrice A' par une suite opérations élémentaires sur les colonnes de A. On notera alors $A \underset{C}{\sim} A'$.

Remarque. $\underset{C}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices.

Propriété 11

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(1) $AD_i(\lambda)$ est la matrice obtenue en appliquant $C_i \leftarrow \lambda C_i$ à A.

(2) $AP_{i,j}$ est la matrice obtenue en appliquant $C_i \leftrightarrow C_j$ à A.

(3) $AT_{i,j}(\lambda)$ est la matrice obtenue en appliquant $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ à A.

En particulier, on retrouve le résultat suivant.

Propriété 12

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E' produit de matrices d'opérations élémentaires, et une unique matrice échelonnée réduite par **colonnes** R' telles que $A \times E' = R'$.

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, on a vu qu'il existe une matrice E produit de matrices d'opérations élémentaires et une matrice R échelonnée réduite par ligne avec r pivots telle que :

$$EA = R.$$

Si on agit alors sur les colonnes de R, on obtient une matrice E' produit de matrices d'opérations élémentaires telle que :

$$EAE' = J_r \quad \text{où} \quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

3 Matrices carrées inversibles

3.1 Définitions et exemples

Définition.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite **inversible** si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que:

$$AB = BA = I_n.$$

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelé groupe linéaire d'ordre n.

Remarque.

- On ne peut considérer un inverse que pour une matrice carrée.
- Si A est inversible, alors:

$$AC = AD \Rightarrow B(AC) = B(AD) \Rightarrow \underbrace{(BA)}_{=I_n} C = \underbrace{(BA)}_{=I_n} D \Rightarrow C = D.$$

  Et de même, $CA = DA \Rightarrow C = D$.

- Si A est inversible, alors la matrice B telle que $AB = BA = I_n$ est unique. En effet, si B_1 et B_2 satisfont toutes deux ces égalités, alors :

$$B_1 = B_1 \times I_n = B_1 \times (A \times B_2) = (B_1 \times A) \times B_2 = I_n \times B_2 = B_2.$$

  Cette matrice est alors appelée l'**inverse** de A et notée A^{-1}.

- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Exemples. ♦ I_n est inversible, et $I_n^{-1} = I_n$.

♦ La matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est inversible si et seulement si $\lambda_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Et dans ce cas, son inverse est $D^{-1} = diag(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n)$. En effet, si tous les λ_i sont non nuls, on a bien $D \times D^{-1} = D^{-1} \times D = I_n$. Réciproquement, supposons que l'un des λ_i soit nul. Alors pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la i^{eme} ligne de $D \times B$ est nulle et donc $D \times B \neq I_n$ pour tout B.

♦ Les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles, et on a pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}^a st$:

$$D_i(\mu)^{-1} = D_i(1/\mu) \quad ; \quad P_{i,j}^{-1} = P_{i,j} \quad ; \quad T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda).$$

♦ Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a montré que $A^2 = 5A - 4I_3$. En particulier, on a :

$$I_3 = \frac{5}{4}A - \frac{1}{4}A^2 = A \times (\frac{5}{4}I_n - \frac{1}{4}A) = (\frac{5}{4}I_n - \frac{1}{4}A) \times A.$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \frac{5}{4}I_n - \frac{1}{4}A = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

Remarque. Pour une matrice carrée $(2, 2)$ quelconque, on vérifiera la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad - bc)I_2.$$

En procédant comme précédemment, on déduit de cette relation la proposition suivante :

Propriété 13

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Et dans ce cas, son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Vocabulaire. Le scalaire $ad - bc$ s'appelle le déterminant de A et se note $\det(A)$.

Preuve. Si $ad - bc \neq 0$, alors on a :

$$I_2 = \frac{1}{ad - bc}A^2 - \frac{a + d}{ad - bc}A = A \times \left(\frac{1}{ad - bc}A - \frac{a + d}{ad - bc}I_2\right) = \left(\frac{1}{ad - bc}A - \frac{a + d}{ad - bc}I_2\right) \times A.$$

Ainsi A est inversible, et $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}A - \frac{a + d}{ad - bc}I_2 = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Supposons que $ad - bc = 0$, alors $0 = A^2 - (a + d)A$. Si A est inversible, alors $A = (a + d)I_2$, et on aurait :

$$\begin{cases} a = a + d \\ d = a + d \\ b = c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0,$$

ce qui est impossible car 0_2 n'est pas inversible. □

3.2 Produit de matrices inversibles

Propriété 14 (de l'inverse)

(1) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices inversibles, alors AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(2) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors ${}^tA$ l'est aussi et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

Remarque. L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est donc stable pour le produit matriciel (mais pas pour la somme !).

Preuve.

(1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles. On a :

$$(B^{-1}A^{-1}) \times (AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n.$$

$$(AB) \times (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A \times A^{-1} = I_n.$$

Ainsi AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$, et en prenant la transposée :

$${}^t(A^{-1}) \times {}^tA = {}^tA \times {}^t(A^{-1}).$$

Ainsi ${}^tA$ est inversible et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

$\square$

Remarque. Nous avons vu que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E produit de matrices d'opérations élémentaires, et une unique matrice échelonnée réduite par lignes R telles que $E \times A = R$. On peut réécrire cette égalité sous la forme :

$$A = E' \times R$$

avec $E' = E^{-1}$ produit de matrices d'opérations élémentaires (l'inverse d'une matrice élémentaire étant une matrice élémentaire).

3.3 Caractérisation des matrices inversibles

Théorème 15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$.

(1) A est une matrice inversible ;

(2) il existe $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' \times A = I_n$;

(3) le système $AX = 0$ admet une seule solution ($X = 0$) ;

(4) le rang de la matrice A est n ;

(5) $A \underset{L}{\sim} I_n$;

(6) pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution ;

(7) pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.

Preuve. On montre (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1), puis (1) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (4).

(1) $\Rightarrow$ (2) Immédiat.

(2) $\Rightarrow$ (3) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0$. Alors $A'AX = 0$, et puisque $A'A = I_n$, on obtient $X = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Supposons que le rang de A soit strictement plus petit que n. Alors d'après le cours sur les systèmes linéaires, le système $AX = 0$ admet une infinité de solutions (il y aura $n - r > 0$ inconnues paramètres). Ce qui par hypothèse est faux. Donc le rang de A est n.

(4) $\Rightarrow$ (5) Toujours d'après le cours sur les systèmes linéaires, on a vu que si A est de rang n, alors $A \underset{\mathcal{L}}{\sim} I_n$.

(5) $\Rightarrow$ (1) Si $A \underset{\mathcal{L}}{\sim} I_n$, alors il existe une matrice E, produit de matrices d'opérations élémentaires, telle que $A = E \times I_n = E$. Or les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles, donc E l'est également, et donc A aussi.

Montrons la deuxième chaine d'implications.

(1) $\Rightarrow$ (6) Supposons que A est inversible et notons A^{-1} son inverse. Soit également $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Considérons le système $AX = B$. En multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient $X = A^{-1}B$. Donc le système admet bien une unique solution.

(6) $\Rightarrow$ (7) Immédiat.

(7) $\Rightarrow$ (4) Supposons que pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution. Montrons que A est de rang $r = n$. Supposons par l'absurde que $r < n$. Alors A est équivalente par ligne à une matrice échelonnée réduite ayant $r < n$ pivots. On sait qu'alors l'ensemble des solutions peut être vide s'il y a un pivot dans la dernière colonne de la matrice augmentée. Ainsi il existe $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = B$ n'ai pas de solution, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi le rang de A est égal à n.

$\square$

On déduit de ce résultat les conséquences suivantes.

Propriété 16

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. Alors T est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous non nuls**.

Preuve. Si tous les coefficients diagonaux de T sont non nuls, on sait alors que pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ est de Cramer, et donc qu'il admet une unique solution. Ainsi par le théorème précédent, T est inversible.
Réciproquement, supposons que l'un des coefficients diagonaux $t_{i,i}$ de T soit nul. En appliquant l'algorithme de Gauss, les $i - 1$ premiers pivots seront sur la diagonale de la réduite, mais le i-ième (s'il y en a un) sera en position $k > i$. Dans tous les cas, il y aura alors au plus $i - 1 + (n - k + 1)$ pivots, donc au plus $n - 1$ pivots. La matrice T n'est donc pas de rang n, et T n'est pas inversible. $\square$

Propriété 17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors : $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \times A = I_n \Leftrightarrow \exists B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \times B' = I_n$.

Preuve. On a déjà montré que $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \times A = I_n$. Supposons qu'il existe $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B' = I_n$. Alors en prenant la transposée, ${}^tB' \times^t A = I_n$. En utilisant le Théorème, on obtient que ${}^tA$ est inversible, et donc $A =^t ({}^tA))$ est inversible aussi. □

▶ *Pour montrer qu'une matrice A est inversible, il suffit de trouver une matrice B telle que $A \times B = I_n$ (resp. $B \times A = I_n$). Il est donc inutile de vérifier que $B \times A = I_n$ (resp. $A \times B = I_n$), c'est automatiquement vérifié.*

Propriété 18

Toute matrice carrée inversible est le produit d'un nombre fini de matrices d'opérations élémentaires, ce qui se traduit en disant que le groupe linéaire est engendré par les matrices d'opérations élémentaires.

Preuve. On vient de le voir, si A est inversible alors $A \underset{\mathcal{L}}{\sim} I_n$ et $A = E$ qui est un produit d'un nombre fini de matrices d'opérations élémentaires. □

Remarque.

- $A \underset{\mathcal{L}}{\sim} B$ si et seulement si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PB$.
- $A \underset{\mathcal{C}}{\sim} B$ si et seulement si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = BP$.

Montrons par exemple le premier point :
Si $A \underset{\mathcal{L}}{\sim} B$, alors il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes permettant de passer de B à A, ce qui se traduit matriciellement par l'existence d'une matrice E produit de matrices d'opérations élémentaires telle que $A = EB$. On obtient alors le résultat puisque $E \in GL_n(\mathbb{K})$.
Réciproquement, supposons que $A = PB$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors par la proposition précédente, P est produit de matrices élémentaires, et donc on peut passer de B à A par des opérations élémentaires sur les lignes. Donc on a bien $A \underset{\mathcal{L}}{\sim} B$.

3.4 Méthodes pratiques de calcul de l'inverse

Calcul de l'inverse par la méthode de Gauss-Jordan

Propriété 19

On considère une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
S'il est possible de ramener à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes la matrice A à la matrice identité, la matrice A est inversible et on obtient A^{-1} en effectuant sur les lignes de la matrice identité les mêmes opérations que celle effectuées sur les lignes de A.

Preuve. La première partie de cette proposition a déjà été démontrée au théorème précédent. Supposons que $A \underset{L}{\sim} I_n$, alors il existe E produit de matrices d'opérations élémentaires telle que $E \times A = I_n$. Ainsi $A^{-1} = E = E \times I_n$, et A^{-1} s'obtient en effectuant sur les lignes de la matrice identité les mêmes opérations que celle effectuées sur les lignes de A. □

▶ *Partant de deux matrices M et I_n, on effectue sur M et sur I_n les manipulations élémentaires sur les lignes qui ramènent M à I_n, et donc I_n à M^{-1}.*

Exemple. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à $(A|I_n)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}\right. \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left\{ L_2 \leftarrow \tfrac{1}{2} L_2 \right. \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{array}\right. \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{12} L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/12 & -1/6 & -1/12 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}\right. \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/12 & -1/6 & 5/12 \\ 0 & 1 & 0 & -1/12 & 1/3 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1 & 5/12 & -1/6 & -1/12 \end{array}\right)$$

Ainsi A est inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/12 & -1/6 & 5/12 \\ -1/12 & 1/3 & -1/12 \\ 5/12 & -1/6 & -1/12 \end{pmatrix}$.

Calcul de l'inverse par la résolution d'un système linéaire

D'après la caractérisation des matrices inversibles, nous avons vu que :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ si et seulement si le système } A \times X = Y \text{ est de Cramer.}$$

De plus, l'unique solution de ce système est alors $X = A^{-1}Y$. Cela va nous fournir une autre méthode pour déterminer si A est inversible et pour calculer A^{-1} le cas échéant.

▶ *Pour un n-uplet $Y = (y_1, \dots, y_n)$ de paramètres, on résout le système (S) $AX = Y$.*

- *On échelonne (S) par l'algorithme de Gauss-Jordan. Deux cas se présentent :*
  - *si (S) n'est pas de Cramer, A n'est pas inversible.*
  - *si (S) est de Cramer, A est inversible. De plus,*
- *L'unique solution de (S) s'exprime en fonction des paramètres $y_1, \dots, y_n$: $X = A^{-1}Y$.*
- *On détermine A^{-1} par identification.*

Exemple. Calculons l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

On échelonne le système (S) $AX = Y$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \\ \quad 5x_2 - 4x_3 = y_1 - 3y_2 \\ \quad\quad -x_3 = y_3 - 2y_2 \end{cases}$$

Le système est sous forme triangulaire avec coefficients diagonaux tous non nuls. On en déduit que le système (S) est de Cramer, et donc que A est inversible. De plus en faisant la remontée (c'est à dire en cherchant l'échelonnée réduite), on obtient :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1/5y_1 + \quad +1/5y_3 \\ x_2 = 1/5y_1 + y_2 - 4/5y_3 \\ x_3 = \quad 2y_2 - y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à lire les coefficients de A^{-1} : $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$