Chapitre 19

# Intégration


**1 Intégration des fonctions en escalier** **2**
- 1.1 Fonctions en escalier . . . . . . . . . . . . . . 2
- 1.2 Intégration des fonctions en escalier . . . . . 3
- 1.3 Approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier . . . . . . . . . . . . 4

**2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment** **5**
- 2.1 Construction . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
- 2.2 Propriétés de l'intégrale . . . . . . . . . . . . 7

**3 Sommes de Riemann** **10**

**4 Intégrale des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{C}$** **13**

**5 Calcul intégral** **13**
- 5.1 Primitives . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
- 5.2 Étude de $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ . . . . . . . . . . . 15
- 5.3 Intégration par parties . . . . . . . . . . . . . 16
- 5.4 Changement de variables . . . . . . . . . . . . 16

**6 Formules de Taylor** **17**
- 6.1 Formule de Taylor avec reste intégral . . . . . 17
- 6.2 Applications . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18



Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

# 1 Intégration des fonctions en escalier

## 1.1 Fonctions en escalier

**Définition.**

On appelle **subdivision** $s$ d'un segment $[a, b]$ toute suite finie $s = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de nombres réels tels que :

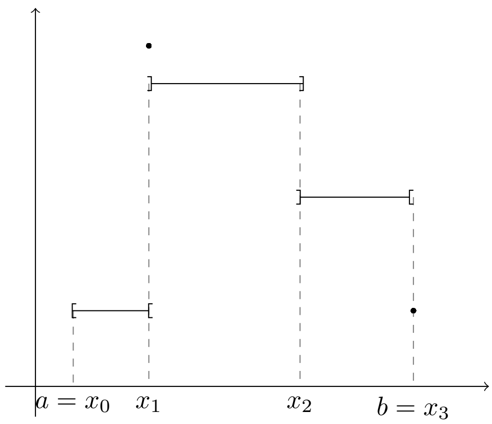
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

**Définition.**

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. La fonction $\varphi$ est dite **en escalier** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $s = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que $\varphi$ soit constante sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ où $1 \leq k \leq n$.
La subdivision $s$ est dite adaptée à la fonction en escalier $\varphi$, ou d'une autre manière $\varphi$ est en escalier relativement à la subdivision $s$.
On note $\mathcal{E}(a, b)$ l'ensemble des fonctions en escalier.

**Exemples.**

- Une fonction constante est en escalier sur tout segment $[a, b]$, relativement à toute subdivision de $[a, b]$.
- La fonction partie entière est en escalier sur tout segment $[a, b]$, relativement à la subdivision de $[a, b]$ constituée de $a, b$ et de tous les entiers du segment $[a, b]$.
- La fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ suivante est en escalier relativement à la subdivision $s = (a, x_1, x_2, b)$.




**Propriété 1**

Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $|\varphi|$, $\lambda\varphi + \mu\psi$, $\varphi \times \psi$ sont dans $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.

**Preuve.** Soient $(f, g) \in \mathcal{E}([a, b], R)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a $s : a = a_0 < \cdots < a_n = b$, subdivision de $[a, b]$ adaptée à $f$ et $t : a = b_0 < \cdots < b_p = b$, subdivision de $[a, b]$ adaptée à $g$. On considère $u = s \cup t$ qu'on réécrit $a = c_0 < \cdots < c_r = b$.
Pour $i \in [|0, r-1|]$, $f_{|]c_i, c_{i+1}[}$, $f_{|]c_i, c_{i+1}[}$ et $g_{|]c_i, c_{i+1}[}$ sont constantes, donc $|f|_{|]c_i, c_{i+1}[}$, $(\lambda f + \mu g)_{|]c_i, c_{i+1}[}$ et $(fg)_{|]c_i, c_{i+1}[}$ également. Ainsi $fg$ et $\lambda f + \mu g$ sont en escaliers. $\square$

**Remarque.** Comme de plus la fonction nulle est en escalier, on en déduit que $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$.

### 1.2 Intégration des fonctions en escalier

**Définition.**

Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur $[a,b]$ relativement à la subdivision $s = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$. Notons $c_k$ la valeur prise par $\varphi$ sur l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ où $1 \leq k \leq n$.
On appelle **intégrale de la fonction en escalier $\varphi$ sur** $[a,b]$ le réel noté $\int_{[a,b]} \varphi$ donné par :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}).$$

**Remarque.**

- L'intégrale ne dépend pas des valeurs de $f$ aux points de la subdivision.
- Cette définition est consistante car le réel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$ ne dépend pas de la subdivision choisie. En effet :
  - *L'intégrale est invariante si on ajoute un nombre fini de points à $s = (x_0, \ldots, x_n)$.*
    Il suffit de le montrer pour l'ajout d'un point. Si $s' = (x_0, \ldots, x_{m-1}, y, x_m, \ldots, x_n)$, alors :
    $$c_1(x_1 - x_0) + \cdots + c_{m-1}(y - x_{m-1}) + c_{m-1}(x_m - y) + \cdots + c_n(x_n - x_{n-1})$$
    est égal à
    $$c_1(x_1 - x_0) + \cdots + c_{m-1}(x_m - x_{m-1}) + \cdots + c_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}).$$
  - *L'intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie*
    Soient $s$ et $t$ sont deux subdivisions adaptées à $\varphi$. D'après ce qui précède, le calcul de $\int_{[a,b]} \varphi$ conduit au même résultat sur les subdivisions $s$ et $s \cup t$, sur $t$ et $s \cup t$, et donc sur les subdivisions $s$ et $t$ .

**Interprétation géométrique.** L'intégrale de $\varphi$ est la différence $R_+ - R_-$ où :

- $R_+$ est la somme des aires des rectangles situés au dessus de l'axe $Ox$ ;
- $R_-$ est la somme des aires des rectangles situés en dessous de l'axe $Ox$.

Il s'agit de l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe représentative de $\varphi$, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

**Exemple.** Calculons $\int_{[0,n]} E$ où $E$ désigne la fonction partie entière :

$$\int_{[0,n]} E = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

**Propriété 2**

(1) Linéarité de l'intégrale : $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\int_{[a,b]}(\lambda\varphi+\mu\psi) = \lambda \int_{[a,b]} \varphi + \mu \int_{[a,b]} \psi$.

(2) Relation de Chasles : $\forall \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, $\forall c \in ]a,b[$, $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

(3) Positivité : $\forall \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$.

(4) Croissance : $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, $\varphi \leq \psi \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$.

**Preuve.**

(1) Soient $s$ et $t$ des subdivisions adaptées à $\varphi$ et $\psi$ et $u = s \cup t$. On note $u : a = a_0 < \cdots < a_n = b$. Pour $i \in [|0, n-1|]$, $\varphi_{|]a_i,a_{i+1}[}$ et $\psi_{|]a_i,a_{i+1}[}$ sont des constantes qu'on notera $k_i$ et $l_i$.

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}(\lambda\varphi+\mu\psi) &= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)(\lambda k_i+\mu l_i) = \lambda\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)k_i + \mu\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)l_i \\ &= \lambda\int_{[a,b]}\varphi + \mu\int_{[a,b]}\psi\end{aligned}$$

(2) Tout d'abord si $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, alors $\varphi_{|[a,c]}$ et $\varphi_{|[c,b]}$ sont aussi en escalier.

Soit $s$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à $\varphi$ et $t = s \cup \{c\}$, qu'on écrit $a = a_0 < \cdots < a_n = b$. Soit $p \in [|0,n|]$ tel que $a_p = c$. Alors $a = a_0 < \cdots < a_p = c$ est une subdivision de $[a,c]$ adaptée à $\varphi_{|[a,c]}$ et $c = a_p < \cdots < a_n = b$ est une subdivision de $[c,b]$ adaptée à $\varphi_{|[c,b]}$. Pour $i \in [|0,n-1|]$, $\varphi_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est constante égale à $k_i$. Ainsi

$$\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \sum_{i=0}^{p-1}(a_{i+1}-a_i)k_i + \sum_{i=p}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)k_i = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{+1}-a_i)k_i = \int_{[a,b]} f.$$

(3) Comme $f$ est positive, $k_i \geq 0$. Par suite, $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} k_i(a_{i+1}-a_i) \geq 0$.

(4) Il suffit d'appliquer (3) à la fonction $\psi - \varphi$ et d'utiliser la linéarité de l'intégrale.

□

## 1.3 Approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier

**Théorème 3**

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escaliers telle que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - \theta(x)| \leq \epsilon$.

**Preuve.** Admis. □

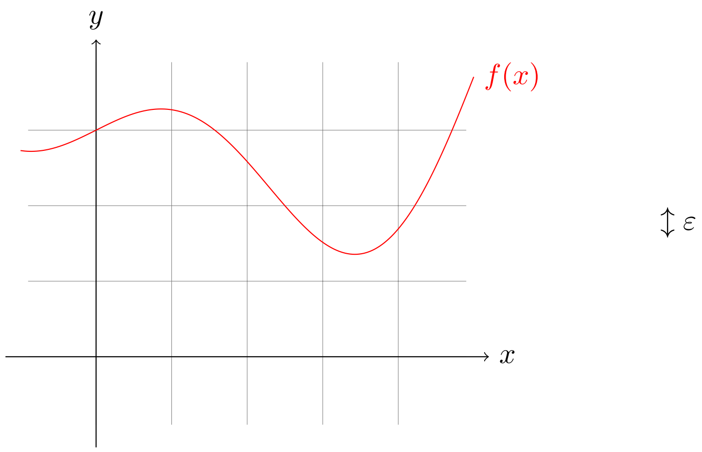
**Propriété 4**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

**Preuve.** D'après le théorème précédent, on a $\theta$ en escaliers telle que $\forall x \in [a, b]$, $|f(x) - \theta(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. $\theta(x) - \frac{\epsilon}{2} \leq f(x) \leq \theta(x) + \frac{\epsilon}{2}$. On pose alors les fonctions en escalier $\varphi = \theta - \frac{\epsilon}{2}$ et $\psi = \theta + \frac{\epsilon}{2}$ pour obtenir le résultat. $\square$

**Illustration.** Déterminer graphiquement $\varphi$ et $\psi$ qui conviennent sur l'exemple suivant :



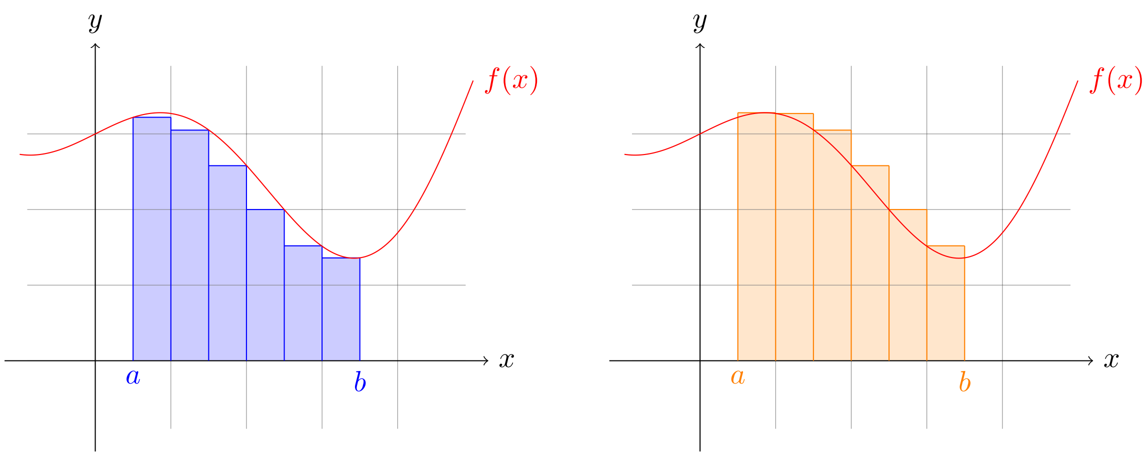

## 2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

### 2.1 Construction

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Notons :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Si $\varphi, \psi$ sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$, alors les nombres $\int_{[a,b]} \varphi$ et $\int_{[a,b]} \psi$ donnent intuitivement des approximations par défaut et excès de l'aire algébrique du domaine $\mathcal{D}$.




Pour définir l'aire de $\mathcal{D}$, on est ainsi conduit à introduire les ensembles suivants :

$$\mathcal{E}^+_{[a,b]}(f) = \{\psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) | \psi \geq f\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) | \varphi \leq f\}.$$

**Théorème 5**

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors :

- $A^-_{[a,b]}(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f) \right\}$ admet une borne supérieure,
- $A^+_{[a,b]}(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+_{[a,b]}(f) \right\}$ admet une borne inférieure,

et ces deux bornes sont égales.

**Preuve.** La fonction $f$ étant continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée sur $[a,b]$. posons $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

- $\mathcal{E}^-_{[a,b]}(f)$ est non vide puisqu'il contient la fonction constante $m$. Ainsi $I^-_{[a,b]}(f)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. De plus pour tout $\varphi \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f)$, on a $\varphi \leq f \leq M$. Donc :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} M = M(b-a).$$

  L'ensemble $A^-_{[a,b]}(f)$ est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée (par $M(b-a)$). Il possède donc une borne supérieure que l'on note $\alpha$.

- De même, $A^+_{[a,b]}(f)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par $m(b-a)$. Elle possède donc une borne inférieure que l'on note $\beta$.

- Puisque pour tout $(\varphi,\psi) \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f) \times \mathcal{E}^+_{[a,b]}(f)$, $\varphi \leq \psi$, on a $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$. Ainsi $\int_{[a,b]} \psi$ est un majorant de $A^-(f)$, sa borne supérieure $\alpha$ est donc plus petite que $\int_{[a,b]} \psi$. On obtient :

$$\forall \psi \in \mathcal{E}^+_{[a,b]}(f), \quad \alpha \leq \int_{[a,b]} \psi.$$

  De même, $\alpha$ est un minorant de $A^+_{[a,b]}(f)$, et $\beta$ est le plus grand des minorants de cette partie. Donc $\alpha \leq \beta$.

- Soit $\epsilon > 0$. On sait qu'il existe $\varphi \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+_{[a,b]}(f)$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, $\psi(x) - \varphi(x) \leq \epsilon$. On a alors :

$$\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \epsilon(b-a).$$

  Or par définition de $\alpha$ et $\beta$, on a :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq \alpha \leq \beta \leq \int_{[a,b]} \psi.$$

  D'où pour tout $\varepsilon > 0$, $0 \leq \beta - \alpha \leq \int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \epsilon(b-a)$. Finalement, on a bien $\alpha = \beta$.

□

**Définition.**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle **intégrale de $f$ sur** $[a,b]$ le nombre réel noté $\int_{[a,b]} f$ défini par :

$$\int_{[a,b]} f = \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f) \right\} = \inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+_{[a,b]}(f) \right\}$$

$\square$

**Interprétation géométrique.** $\int_{[a,b]} f$ est l'aire algébrique du domaine $\mathcal{D}$ du plan situé entre le graphe de $f$ et l'axe des abscisses (comptée positivement lorsque le graphe est au dessus de l'axe $Ox$, négativement en dessous).

## 2.2 Propriétés de l'intégrale

**Propriété 6** (Linéarité)

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$

**Lemme.** Soit $\varepsilon > 0$. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $\theta \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que $|f - \theta| \leq \varepsilon$, alors

$$\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta \right| \leq (b - a)\varepsilon$$

**Preuve du Lemme.** On a $\theta - \varepsilon \leq f \leq \theta + \varepsilon$, d'où (par définition de l'intégrale) :

$$\int_{[a,b]} (\theta - \varepsilon) \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} (\theta + \varepsilon).$$

Par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta \right| \leq (b - a)\varepsilon.$$

**Preuve.** Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que :

$$|f - \theta_1| \leq \varepsilon \text{ et } |g - \theta_2| \leq \varepsilon.$$

Par le lemme :

$$(*) \quad \left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta_1 \right| \leq (b - a)\varepsilon \text{ et } \left| \int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} \theta_2 \right| \leq (b - a)\varepsilon.$$

Posons $h = \lambda f + \mu g$ et $\theta = \lambda \theta_1 + \mu \theta_2$. On a :

$$|h - \theta| \leq (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.$$

Par le lemme :

$$\left| \int_{[a,b]} h - \int_{[a,b]} \theta \right| \leq (b - a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.$$

Posons $I = \displaystyle\int_{[a,b]} \theta = \lambda \int_{[a,b]} \theta_1 + \mu \int_{[a,b]} \theta_2$ (par linéarité pour les fonctions en escalier). Grâce à $(*)$, on a :

$$\left| \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g - I \right| \leq (b - a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left| \int_{[a,b]} h - (\lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g) \right| \\
&= \left| \int_{[a,b]} h - I + (I - \lambda \int_{[a,b]} f - \mu \int_{[a,b]} g) \right| \\
&= \left| \int_{[a,b]} h - I \right| + \left| I - \lambda \int_{[a,b]} f - \mu \int_{[a,b]} g) \right| \\
&\leq 2(b-a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme c'est vrai quelque soit $\varepsilon > 0$, on en déduit $\Delta = 0$, et donc la linéarité de l'intégrale. □

**Propriété 7** (Relation de Chasles)

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues et $c \in [a,b]$.

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

**Preuve.** Soit $\varphi \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f)$. On a alors :

$$\varphi_{|[a,c]} \in \mathcal{E}^-_{[a,c]}(f) \text{ et } \varphi_{|[c,b]} \in A^-_{[c,b]}(f).$$

Par définition de l'intégrale, on obtient :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi \leq \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Ainsi $\displaystyle\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$ est un majorant de $A^-_{[a,b]}(f)$. Par définition de la borne supérieure :

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

En appliquant (linéarité) ce résultat à $-f$, on en déduit l'inégalité inverse, et donc :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

□

**Notation.** Soient $a$ et $b$ deux réels quelconques (en particulier on ne suppose plus nécessairement $a < b$). Soit $f$ une fonction continue entre $a$ et $b$. On définit le réel $\int_a^b f(x)dx$ par :

- si $a < b$, $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$ ;
- si $a = b$, $\int_a^b f(x)dx = 0$ ;
- si $b < a$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_{[b,a]} f(x)dx$.

La relation de Chasles et la linéarité sont alors vraies pour $a, b, c$ quelconques.

**Propriété 8**

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues sur un intervalle $I$ et $a, b \in I$.

(1) $f \geq 0$ et $a \leq b \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ;

(2) $f \leq g$ et $a \leq b \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ ;

(3) $a \leq b \Rightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ ;

(4) Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$ entre $a$ et $b$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

**Preuve.**

(1) Puisque $f \geq 0$, alors $\varphi = 0$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que $\varphi \leq f$. Par définition de l'intégrale de $f$ sur $[a, b]$, on en déduit que

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx = 0.$$

(2) On applique le point précédent à la fonction $h = g - f \geq 0$ :

$$\int_a^b h(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

par linéarité de l'intégrale.

(3) On a pour tout $x \in [a, b]$, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. D'où par croissance de l'intégrale :

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Ainsi, on obtient $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

(4) Il suffit de prendre l'intégrale dans les inégalités $m \leq f \leq M$.

$\square$

**Remarque.** La majoration suivante, vraie également si $b < a$, peut être utile :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$$

**Définition.**

La valeur moyenne d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue est :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f.$$

**Remarque.** La valeur moyenne est la constante $\mu$ qui vérifie $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mu$.

**Exercice.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

(i) Montrer que $|\mu| \leq \sup_{[a,b]} |f|$.

On a :

$$|\mu| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \sup_{[a,b]} |f| dx = \sup_{[a,b]} |f|.$$

(ii) Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \mu$.

$f$ est une fonction continue sur un segment $[a,b]$. On sait alors qu'il existe $m$, $M$ tels que $f([a,b]) = [m,M]$. De plus on a :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b m dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b M dx,$$

soit encore $m \leq \mu \leq M$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \mu$.

**Propriété 9**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et positive. Alors $\int_{[a,b]} f = 0$ si et seulement si $f$ est nulle sur $[a,b]$.

**Preuve.**

$\Leftarrow$ Si $f$ est nulle, son intégrale est nulle.

$\Rightarrow$ Par contraposition, supposons que $f$ n'est pas nulle sur $[a,b]$ : $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$. D'après la définition de la continuité de $f$ en $c$ avec $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$ :

$$\exists a \leq \alpha < \beta \leq b,\ \forall x \in [a,b],\ x \in [\alpha,\beta] \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, on a $f(x) \leq \frac{f(c)}{2}$. En prenant l'intégrale, on en déduit donc que :

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta \varepsilon dx = (\beta - \alpha)\varepsilon > 0.$$

□

**Remarque.** Si $f$ n'est pas supposée continue, le résultat est faux : par exemple $f(x) = 0$ sur $]0,1[$ et $f(0) = f(1) = 1$ est positive, non nulle mais $\int_0^1 f = 0$.

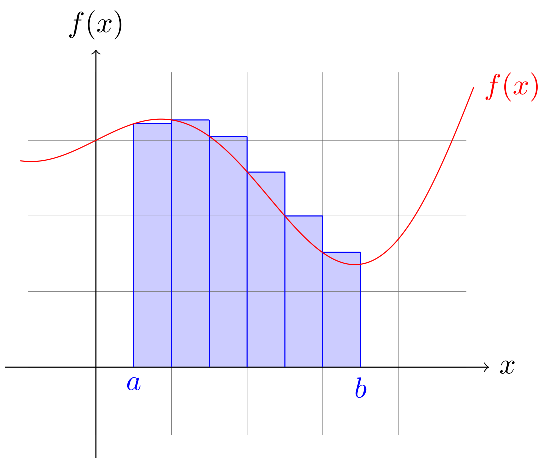
# 3 Sommes de Riemann

**Définition.**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **somme de Riemann d'ordre** $n$ associée à $f$ la somme :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\underbrace{a + k\frac{b-a}{n}}_{=a_k}\right).$$

**Remarque.** Cette somme de Riemann est l'intégrale de la fonction en escalier $\varphi$ qui vaut $f(a_k)$ sur $]a_k, a_{k+1}[$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$. Cela correspond à l'aire en bleu dans le dessin ci-dessous.




**Théorème 10**

Si $f$ est continue sur $[a, b]$, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = \int_{[a,b]} f.$$

**Preuve.** On fait la preuve dans le cas où $f$ est lipschitzienne (ce qui est en particulier le cas si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$). Notons $K$ la constante de lipschitz associée à $f$ sur $[a, b]$.

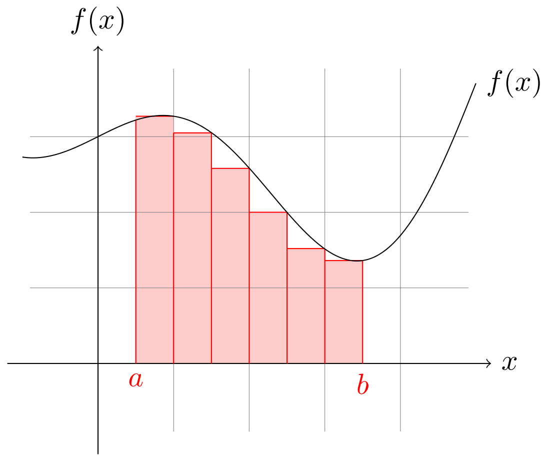
$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)dx - R_n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) - f(a_k)\, dx \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) - f(a_k)\, dx \right| \text{ par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(a_k)|\, dx \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} K|x - a_k| dx \text{ car } f \text{ est lipschitzienne} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} K(a_{k+1} - a_k) dx \text{ car } f \text{ est lipschitzienne} \\
&\leq K \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)^2 = K \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{n^2} = K \frac{(b-a)^2}{n}
\end{aligned}$$

Comme enfin $\lim K \frac{(b-a)^2}{n} = 0$, on obtient par théorème d'encadrement $\lim R_n = \int_a^b f(x)dx$. □

**Remarque.**

- On reconnait la méthode des rectangles. En particulier, ce résultat signifie qu'une somme de Riemann constitue une bonne approximation de l'intégrale pourvu que le pas soit petit.

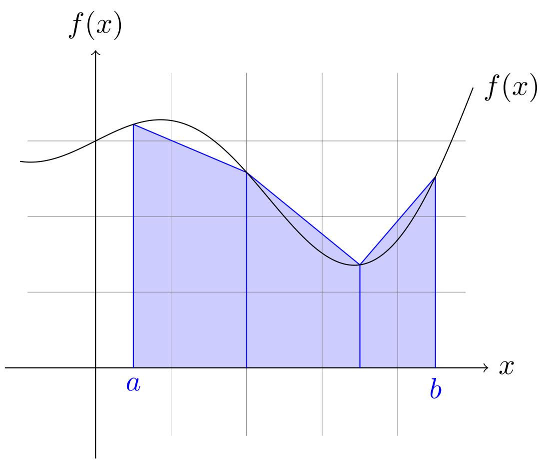
- On a le même résultat avec $R'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.




Méthode des rectangles “à droite”.

**Remarque. Méthode des trapèzes.** La vitesse de convergence de la somme de Riemann vers l'intégrale est en $\frac{1}{n}$. On peut améliorer la précision en utilisant la méthode des trapèzes. On approche alors $\int_{[a,b]} f$ par

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f\left(a_k\right)+f\left(a_{k+1}\right)}{2}$$




On obtient alors une approximation en $\frac{1}{n^2}$ : Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, on peut montrer que

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_n(f)\right| \leq M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

où $M_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

**Exemple.** Calculons :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2},\quad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+n},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

- On a, en posant $f_1 : x \mapsto x$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_1\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f_1(t)dt = \frac{1}{2}.$$

- On a, en posant $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k/n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_2\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f_2(t)dt = \ln 2$$

- $$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \sin\left(\frac{(l+n)\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \sin\left(\frac{l\pi}{n}+\pi\right) = -\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \sin\frac{l\pi}{n}$$

  On pose $f_3 : x \mapsto \sin x$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = -\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \sin\frac{l\pi}{n} = -\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} f_3\left(\frac{l\pi}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\int_0^{\pi} f_3(t)dt = -2.$$

## 4 Intégrale des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{C}$

**Définition.**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
On appelle **intégrale de $f$ sur** $[a,b]$ le nombre complexe défini par :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} Re(f) + i \int_{[a,b]} Im(f).$$

**Propriété 11**

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ continues, $c \in [a,b]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

(1) Linéarité : $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$ ;

(2) Relation de Chasles : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

(3) Inégalité de la moyenne : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

**Remarque.** Les propriétés liées à l'ordre n'ont plus de sens dans le cas complexe.

## 5 Calcul intégral

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

### 5.1 Primitives

**Définition.**

Soient $I$ un intervalle et $f : I \mapsto \mathbb{K}$ une fonction continue. On appelle **primitive** de $f$ sur $I$ toute fonction $F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et dont la dérivée est $f$.

**Propriété 12** (Lien entre deux primitives d'une même fonction)

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle différent d'une constante.

**Preuve.** Si $F_1$ et $F_2$ sont deux primitives de la fonction $F$ sur $I$, alors $(F_1-F_2)' = F_1'-F_2' = f-f = 0$ donc la fonction $F_1 - F_2$ est constante sur $I$. □

**Propriété 13** (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, et $a \in I$.

(1) La fonction $F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$ est l'unique primitive de $f$ s'annulant en $a$.

(2) Pour toute primitive $F : I \to \mathbb{K}$ de $f$, on a

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

**Preuve.**

(1) La fonction $F$ est définie pour tout $x \in I$ car $f$ est continue sur $[a, x]$ ou $[x, a]$ (selon que $x \geq a$ ou $x \leq a$). Soit $x_0 \in I$, montrons que $F$ est dérivable en $x_0$ et que $F'(x_0) = f(x_0)$. On a pour tout $x \in I$ :

$$\begin{aligned} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0) \\ &= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)dt \end{aligned}$$

D'où avec l'inégalité de la moyenne (on vérifie que cette inégalité est aussi vraie si $x < x_0$) :

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt$$

Or $f$ est continue en $x_0$, donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall t \in I,\ |t - x_0| \leq \alpha \ \Rightarrow\ |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Alors pour tout $x \in I$, $|x - x_0| \leq \alpha$, on a pour tout $t \in [x_0, x]$, $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ et en reportant :

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x \varepsilon dt \leq \varepsilon.$$

Ainsi on a montré que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$. Donc $F$ est dérivable en $x_0$ et $F'(x_0) = f(x_0)$. Puisque c'est vrai pour tout $x_0 \in I$ et que $f$ est continue, on en déduit finalement que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $F' = f$.

Reste à montrer que $F$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$. Si $G$ satisfait aussi ces propriétés, alors on a vu qu'il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $F = G + C$. En évaluant en $x = a$, on obtient $C = 0$, et donc $F = G$.

(2) Soit $h : x \mapsto F(x) - F(a)$. Alors $h$ est dérivable sur $I$ comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont, et pour $x \in I$, $h'(x) = F'(x) = f(x)$. De plus $h(a) = 0$, donc $h$ est une primitive de $f$ s'annulant en $a$. D'après l'unicité du point précédent, on a pour tout $x \in I$, $h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. D'où le résultat.

□

**Notations.**

- Le symbole $\int f(x)\mathrm{d}x$ (introduit par Leibniz) désigne une primitive *quelconque* de $f$. Elle est donc définie à une constante additive près.
- La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de $f$ s'annulant en $a$.

## 5.2 Étude de $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

**Propriété 14**

Soient $I, J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $u(I), v(I) \subset J$ et $f : J \to \mathbb{K}$ continue. Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est définie sur $I$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$, et :

$$\forall x \in I,\ g'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

**Preuve.** Pour tout $x \in I$, on a $u(x), v(x) \in J$ et $J$ est un intervalle. Donc $[u(x), v(x)] \subset J$ et $g(x)$ existe pour tout $x \in I$.
La fonction $f : J \to \mathbb{K}$ étant continue sur $J$, elle admet une primitive $F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J$. On a alors pour tout $x \in I$,

$$g(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

La fonction $g$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que différence et composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $x \in I$, on a :

$$g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

□

**Exemple.** Etudions les variations et les limites aux bornes de la fonction $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Psi(x) = \int_x^{3x} e^{-t^2} dt.$$

Notons $f(t) = e^{-t^2}$. La fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $u(x) = x$ et $v(x) = 3x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc $\Psi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Étudions la parité de $\Psi$ : $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et on a pour tout $x \geq 0$ :

$$\Psi(-x) = \int_{-x}^{-3x} e^{-t^2} dt = -\int_{-3x}^{-x} e^{-t^2} dt = -\int_x^{3x} e^{-t^2} dt$$

car la fonction $f$ est paire (pour la dernière égalité, il suffit de raisonner en terme d'aires). On étudie donc la fonction sur $\mathbb{R}_+$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ :

$$\Psi'(x) = 3e^{-9x^2} - e^{-x^2}.$$

On a $\Psi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \dfrac{\ln 3}{8} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{\dfrac{\ln 3}{8}}$. Ainsi, $\Psi$ est croissante sur $[0, \sqrt{\dfrac{\ln 3}{8}}]$, décroissante sur $[\sqrt{\dfrac{\ln 3}{8}}, +\infty[$.
Déterminons sa limite en $+\infty$ : pour tout $t \in [x, 3x]$,

$$e^{-9x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2} \Rightarrow 2xe^{-9x^2} \leq \Psi(x) \leq 2xe^{-x^2}.$$

Par croissances comparées et théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \Psi(x) = 0$.

## 5.3 Intégration par parties

**Propriété 15** (Intégration par parties)

Soient $f$ et $g$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{K}$.

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

**Preuve.** On a

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)g'(t)dt = \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))dt = \int_a^b (fg)'(t)dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b$$

puisque $fg$ est $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions qui le sont. □

**Notation.** En pratique, on procèdera à une intégration par partie en utilisant le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} + & g & & f' \\ & & \searrow & \\ - & g' & \xleftarrow{\int} & f \end{array}$$

**Exemple.**

- Calculer une primitive de arctan.
- Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx$.

## 5.4 Changement de variables

**Propriété 16** (Changement de variable)

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur $I$. Soient $\varphi : [a, b] \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{dx} = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{dt}.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variables $x = \varphi(t)$.

**Preuve.** Si $F$ est une primitive de $f$, alors $F\circ\varphi$ est une primitive de $f\circ\varphi\times\varphi'$ et on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

$$\int_a^b f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{dt} = [F\circ\varphi(t)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

□

► *Dans la pratique, on veillera en effectuant un changement de variables à modifier les trois éléments :*

- *la variable $x=\phi(t)$,*
- *l'élément différentiel $dx=\phi'(t)dt$,*
- *les bornes de l'intégrale : si $t$ varie entre $a$ et $b$, $x=\phi(t)$ doit varier entre $\phi(a)$ et $\phi(b)$.*

**Exemple.**

♦ Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{e^x}{1+e^x}dx$.

♦ Calculer $\displaystyle\int_{1/a}^a \frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

**Propriété 17**

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ une fonction continue.

(1) si $f$ est périodique de période $T$, alors pour tous $a,b\in\mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\ dt\ ,\ \int_a^{a+T} f(t)\ dt = \int_b^{b+T} f(t)\ dt$$

(2) si $f$ est une fonction paire, alors pour tout $a\in\mathbb{R}$: $\int_{-a}^a f(t)\ dt = 2\int_0^a f(t)\ dt$.

(3) si $f$ est une fonction impaire, alors pour tout $a\in\mathbb{R}$: $\int_{-a}^a f(t)\ dt = 0$.

# 6 Formules de Taylor

## 6.1 Formule de Taylor avec reste intégral

**Théorème 18** (Formule de Taylor avec reste intégral)

Pour toute fonction $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on a l'égalité :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

**Preuve.** On montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ : "Pour tout $f\in\mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{K})$, on a $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$".

- Si $f$ est $\mathcal{C}^1$, on a :
$$\sum_{k=0}^{0}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^0}{0!}f'(t)dt=f(a)+\int_a^b f'(t)dt=f(a)+(f(b)-f(a))=f(b)$$
donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Soit $f\in\mathcal{C}^{n+2}([a,b],\mathbb{K})$. En particulier, $f\in\mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{K})$. Par hypothèse de récurrence, on a :
$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$$
De plus, les fonction $f^{(n+1)}$ et $t\mapsto-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $I$, on a, par intégration par parties
$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt&=\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^b-\int_a^b-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt\\&=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt.\end{aligned}$$
On en déduit immédiatement que
$$\begin{aligned}f(b)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt\\&=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^x\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt\end{aligned}$$
et $\mathcal{P}(n+1)$ est donc prouvé.

En conclusion, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

**Application aux inégalités.** Montrons que $\forall x\in[0,\pi/2]$, $x-\frac{x^3}{6}\le\sin(x)\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$.

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à sinus à l'ordre 4 entre 0 et $x\in[0,\pi/2]$ :
$$\sin(x)-(x-x^3/6)=\int_0^x\frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)dt.$$
Or en encadrant l'intégrale, on a :
$$0\le\int_0^x\frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)dt\le\int_0^x\frac{(x-t)^4}{4!}dt=\frac{x^5}{120}.$$
D'où finalement $\forall x\in[0,\pi/2]$, $x-\frac{x^3}{6}\le\sin(x)\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$.

**Propriété 19** (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Pour toute fonction $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on a l'inégalité :
$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|\le\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}$$
où $M_{n+1}=\sup_{[a,b]}|f^{(n+1)}|$.

**Preuve.** On majore le reste de la formule de Taylor par l'inégalité de la moyenne :
$$\left|\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right|\le\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(t)\right|dt\le M_{n+1}\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}dt=M_{n+1}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$
□

### 6.2 Applications

**Propriété 20** (Formule de Taylor-Young)

Pour toute fonction $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et tout $a \in I$, on a :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

**Preuve.** Puisque $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$, on a par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt.$$

En retranchant le terme en $k = n$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \\ &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))dt \end{aligned}$$

Ainsi avec l'inégalité de la moyenne, on en déduit (on suppose $x \geq a$, on procèderait de même si $x \leq a$) :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \left| (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)) \right| dt$$

Or $f^{(n)}$ est continue en $a$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in I, |t-a| \leq \alpha \ \rightarrow \ \left| (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)) \right| \leq \varepsilon.$$

On obtient ainsi, pour $a \leq x \leq a + \alpha$ :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \varepsilon \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \varepsilon \frac{(x-a)^n}{n!} \leq \varepsilon (x-a)^n.$$

D'où le résultat. □

**Remarque.** C'est grâce à cette formule qu'on avait obtenu les développements limités des fonctions $\exp, \cos, \sin, x \mapsto (1+x)^\alpha$ notamment.

**Propriété 21**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\exp(z) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

**Preuve.** La dérivée $n$-ième de la fonction $f : x \mapsto \exp(zx)$ est $x \mapsto z^n \exp(zx)$, et on a donc en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0, 1]$ :

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0 \leq x \leq 1} |z^{n+1} \exp(zx)|.$$

En notant $z = a + ib$, on obtient $|\exp(zx)| = \exp(ax) \leq \exp(|a|)$ pour $0 \leq x \leq 1$. On en déduit :

$$\left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|a|).$$

On conclut par théorème d'encadrement en notant que $\lim \dfrac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. □