

**Séries numériques**

<b>1</b>	<b>Généralités</b>	<b>2</b>
1.1	Définitions . . . . .	2
1.2	Condition nécessaire de convergence . . . . .	3
1.3	Séries usuelles . . . . .	4
1.3.1	Série géométrique . . . . .	4
1.3.2	Série exponentielle . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Séries à termes positifs</b>	<b>5</b>
2.1	Résultats de convergence . . . . .	5
2.2	Comparaison Série-Intégrale . . . . .	7
2.3	Comparaison à une série géométrique . . . . .	10
2.4	Comparaison à une série de Riemann . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Séries absolument convergentes</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Critère spécial des séries alternées</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Plan d'étude d'une série numérique</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Développement décimal d'un nombre réel</b>	<b>15</b>

# 1 Généralités

Dans tout le chapitre  $\mathbb{K}$  désignera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et les suites considérées seront à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

## 1.1 Définitions

### Définition.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

- On appelle série de terme général  $u_n$ , la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

On la note  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ,  $\sum_{n \geq 0} u_n$  ou encore  $\sum u_n$ .

- On dit que la série  $\sum u_n$  converge si la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite finie dans  $\mathbb{K}$ , et on appelle alors somme de la série :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Dans le cas contraire, on dit que la série  $\sum u_n$  est divergente.

- Lorsque la série converge, on pose aussi pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

On dit que :

- $S_n$  est la somme partielle d'ordre  $n$  ou  $n$ -ième somme partielle ;
- $R_n$  est le reste partiel d'ordre  $n$  ou  $n$ -ième reste partiel.

**Remarque.** Si  $\sum u_n$  est une série converge,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S - S_n = 0$ .

### Propriété 1

Soient  $\sum u_n$ ,  $\sum v_n$  deux séries.

- Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont convergentes et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , alors la série  $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

- Si  $\sum u_n$  est convergente et  $\sum v_n$  est divergente, alors  $\sum(u_n + v_n)$  est une série divergente.

**Remarque.** Attention, il est possible que la série  $\sum(u_n + v_n)$  converge alors que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent. **On ne peut donc pas scinder cette somme en deux somme sans vérifier au préalable que ces deux séries convergent.**

**Vocabulaire.** Déterminer la nature d'une suite ou d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente. En particulier, deux suites ou deux séries sont dites de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

**Propriété 2**

On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre **fini** de ces termes.

**Preuve.** En effet, si  $u_n = v_n$  pour  $n \geq N$ , alors la convergence de  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$  équivaut à celle de

$V_n = \sum_{k=0}^n v_k$  puisque :

$$U_n - V_n = \sum_{k=0}^{N-1} (u_k - v_k) = \text{constante.}$$

□

**Remarque.** Toute suite est une série et inversement. En effet :

- la série  $\sum u_n$  est la suite  $(S_n)$  ;
- la suite  $(u_n)$  est la série  $\sum (u_n - u_{n-1})$  car :

$$\sum_{k=0}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_{-1} = u_n \text{ en prenant par convention } u_{-1} = 0.$$

En particulier, la suite  $(u_n)$  et la série  $\sum (u_n - u_{n-1})$  sont de même nature.

**Exercice.** Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

## 1.2 Condition nécessaire de convergence

**Propriété 3** (Condition nécessaire de convergence)

Pour que la série  $\sum u_n$  converge, **il faut** que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Mais **ce n'est pas suffisant** !

**Preuve.** En effet, si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ , alors on a :

$$u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S - S = 0.$$

□

**Vocabulaire.** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0, alors la série associée ne converge pas : on dit qu'elle diverge grossièrement.

**Exemple.** La série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$  diverge grossièrement.

**Exemple d'une série divergente dont le terme général tend vers 0.**

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ , appelée série harmonique, n'est pas grossièrement divergente. Montrons qu'elle diverge cependant. On a pour tout  $k \geq 1$  :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{k}.$$

D'où en sommant pour  $1 \leq k \leq n-1$  :

$$H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}.$$

Ainsi, on a :

$$\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

et donc  $\lim H_n = +\infty$ .

Précisons le comportement de cette série quand  $n \rightarrow +\infty$ . Considérons pour cela  $\gamma_n = H_n - \ln(n)$ . La suite  $(\gamma_n)$  est bornée car  $0 \leq \gamma_n \leq 1$  pour tout  $n$ . Et on a pour tout  $n \geq 2$  :

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 0$$

en se rappelant que  $\ln(1+x) \leq x$  pour tout  $x > -1$ . Ainsi  $(\gamma_n)$  est convergente. Sa limite  $\gamma$  est appelée la constante d'Euler ( $\gamma = 0,5\dots$ ). On a donc  $\gamma_n = \gamma + o(1)$ , et ainsi :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

**1.3 Séries usuelles****1.3.1 Série géométrique**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , et considérons la série  $\sum z^n$ , appelée série géométrique de raison  $z$ .

**Propriété 4**

$\sum z^n$  converge si et seulement si  $|z| < 1$ , et sa somme est alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

**Preuve.**

- Si  $|z| \geq 1$ , alors  $|z^n| \geq 1$  et la suite  $(z^n)$  ne converge pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
- Si  $|z| < 1$ , on a pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$S_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \xrightarrow{|z| < 1} \frac{1}{1 - z}.$$

□

**Remarque.** On a  $S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$  et  $R_n = z^{n+1} + z^{n+2} + \dots = \frac{z^{n+1}}{1 - z}$ .

### 1.3.2 Série exponentielle

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , et considérons la série  $\sum \frac{z^n}{n!}$ , appelée série exponentielle.

#### Propriété 5

$\sum \frac{z^n}{n!}$  est convergente pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , et sa somme est alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

#### Rappel. Formule de Taylor avec reste intégral.

Pour toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , on a l'égalité :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

**Preuve.** La dérivée  $n$ -ième de la fonction  $f : x \mapsto \exp(zx)$  est  $x \mapsto z^n \exp(zx)$ , et on a donc en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur  $[0, 1]$  :

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \left| \exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0 \leq x \leq 1} |z^{n+1} \exp(zx)|.$$

En notant  $z = a + ib$ , on obtient  $|\exp(zx)| = \exp(ax) \leq \exp(|a|)$  pour  $0 \leq x \leq 1$ . On en déduit :

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|a|).$$

On conclut par théorème d'encadrement en notant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ . □

## 2 Séries à termes positifs

Dans cette section, on ne considère que des séries  $\sum u_n$  à termes positifs, c'est à dire  $u_n \geq 0$ .

### 2.1 Résultats de convergence

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs. Alors la suite des sommes partielles  $(S_n)$  est croissante, puisque  $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ . Par le théorème de limite monotone, on obtient :

#### Propriété 6

Soit  $\sum u_n$  une série à terme positifs.

- (1) La série  $\sum u_n$  est convergente si et seulement si la suite  $(S_n)$  des sommes partielles est majorée, soit :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M.$$

- (2) Si la série  $\sum u_n$  diverge, alors on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$ .

**Propriété 7**

Soient deux séries à termes positifs  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ . On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq u_n \leq v_n.$$

- (1) Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge et on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .
- (2) Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge.

**Preuve.**

- (1) Si  $\sum v_n$  converge, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq U_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Donc la suite des sommes partielles  $(U_n)$  est majorée, donc  $\sum u_n$  converge. On obtient de plus en passant à la limite dans les inégalités :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

- (2) Supposons que  $\sum u_n$  diverge. Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$ . Comme de plus,

on a  $0 \leq U_n \leq V_n = \sum_{k=0}^n v_k$ , la suite  $(V_n)$  des sommes partielles n'est pas majorée. Donc  $\sum v_n$  diverge.

□

**Remarque.** Le résultat reste vrai si l'inégalité  $0 \leq u_n \leq v_n$  n'est valable qu'à partir d'un certain rang, puisqu'on ne modifie pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de ses termes.

**Propriété 8**

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs. Supposons que  $u_n = O(v_n)$  (c'est en particulier le cas si  $u_n = o(v_n)$ ).

- (1) Si  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
- (2) Si  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge.

**Preuve.** Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs telles que  $u_n = O(v_n)$  :

$$\exists M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M|v_n|.$$

Puisque  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont à termes positifs, on a donc pour tout  $n \geq n_0$   $u_n \leq Mv_n$ . Le théorème précédent permet alors de conclure. □

**Propriété 9**

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs. Si  $u_n \sim v_n$  alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  sont de même nature.

**Preuve.** Si  $u_n \sim v_n$ , on a en particulier :  $u_n = O(v_n)$  et  $v_n = O(u_n)$ . En appliquant le théorème précédente pour ces deux relations, on obtient le résultat.  $\square$

**ATTENTION.** Le critère d'équivalence est faux si les termes généraux des séries ne sont pas de signe constant.

**Exemples.** Étudier la nature des séries suivantes :

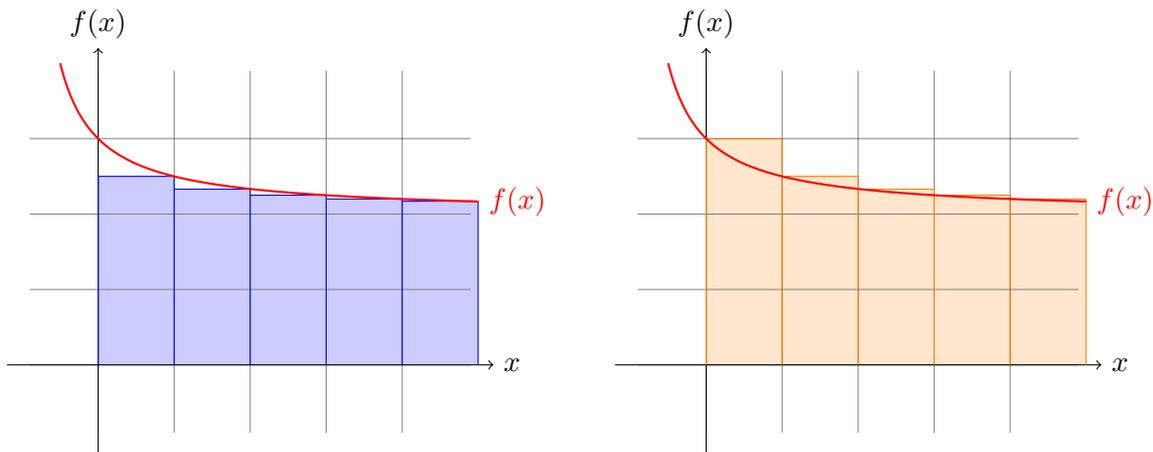
$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \sum \frac{1}{n^2} \quad ; \quad \sum e^{-n^2}.$$

**Exemple.** Étudier la nature de la série suivante et calculer sa somme :

$$\sum \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}.$$

**2.2 Comparaison Série-Intégrale**

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, **positive et décroissante**.



On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n).$$

**Propriété 10**

Si  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, **positive et décroissante**, alors la série  $\sum f(n)$  et la suite  $\left( \int_0^n f(t) dt \right)$  sont de même nature.

**Preuve.** En effet d'après les inégalités précédentes, la série  $\sum f(n)$  est de même nature que la série  $\sum \int_n^{n+1} f(t) dt$ , elle-même de même nature que la suite  $\left( \int_0^n f(t) dt \right)$  de ces sommes partielles.  $\square$

### Application à l'étude de la série de Riemann

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , et considérons la série  $\sum \frac{1}{n^x}$ , appelée série de Riemann.

#### Propriété 11

$\sum \frac{1}{n^x}$  est convergente si et seulement si  $x > 1$ , et on note :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x) \quad (\text{fonction zeta de Riemann}).$$

#### Preuve.

- Pour  $x \leq 1$ , on a :

$$1 + \frac{1}{2^x} + \dots + \frac{1}{n^x} \geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Comme la série harmonique diverge, on en déduit que  $\sum \frac{1}{n^x}$  diverge si  $x \leq 1$ .

- Supposons  $x > 1$ . Alors la fonction  $f(t) = \frac{1}{t^x}$  est continue, positive et décroissante sur  $[1, +\infty[$ .

La série  $\sum f(n)$  est donc de même nature que la suite  $n \mapsto \int_1^n f(t)dt$ . Or, cette suite est croissante et majorée car :

$$\int_1^n f(t)dt = \left[ \frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_1^n = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} \frac{1}{n^{x-1}} \leq \frac{1}{x-1}.$$

Ainsi, la somme de Riemann converge pour  $x > 1$ . □

**Exercices.** Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ avec } P, Q \in \mathbb{R}[X] \quad ; \quad \sum \arccos \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

- $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ . Comme  $P, Q$  sont des polynômes, ils sont de signe constant à l'infini. Donc le terme général est toujours positif (ou négatif) pour  $n$  assez grand. Notons  $a_p X^p$  et  $b_q X^q$  les termes dominants de  $P$  et  $Q$  respectivement. Alors  $P(n) \sim a_p n^p$  et  $Q(n) \sim b_q n^q$ , et on a donc

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_p}{b_q} \frac{1}{n^{q-p}}.$$

– Si  $q - p \leq 1$  : la série  $\sum \frac{a_p}{b_q} \frac{1}{n^{q-p}}$  diverge, et donc  $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$  aussi ;

– si  $q - p \geq 2$  : la série  $\sum \frac{a_p}{b_q} \frac{1}{n^{q-p}}$  converge, et donc  $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$  aussi.

- $\sum \arccos \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ . Puisque  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ , c'est une série à termes positifs. Posons  $u_n = \arccos \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ . On a :

$$\begin{cases} \cos(u_n) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \cos(u_n) = 1 - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) \text{ car } \lim u_n = 0. \end{cases}$$

Ainsi on obtient  $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$ , donc  $u_n^2 \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$  ou encore  $u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{n}}$ . C'est le terme général d'une série de Riemann d'exposant  $\frac{1}{4}$ . Elle diverge donc, et  $\sum u_n$  diverge.

**Remarque.** Déterminons un équivalent du reste partiel  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  de la série de Riemann lorsque  $x > 1$ .

On a l'inégalité  $\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$ . D'où en sommant pour  $n \leq k \leq n+p$  :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p+1} \frac{1}{k^x} \leq \int_n^{n+p+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k^x}.$$

Or on a :  $\int_n^{n+p+1} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1} \left( \frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+p+1)^{x-1}} \right)$ . Faisons alors  $p \rightarrow +\infty$  dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$R_n \leq \frac{1}{x-1} \frac{1}{n^{x-1}} \leq R_{n-1},$$

soit encore :

$$\frac{1}{x-1} \frac{1}{(n+1)^{x-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{x-1} \frac{1}{n^{x-1}}.$$

Donc  $R_n \sim \frac{1}{x-1} \frac{1}{n^{x-1}}$  et on obtient ainsi que :

$$\zeta(x) = S_n + R_n = S_n + \frac{1}{x-1} \frac{1}{n^{x-1}} + o\left(\frac{1}{n^{x-1}}\right).$$

**Exercice.** Déterminer un équivalent de  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

C'est une série de Riemann avec  $x = \frac{1}{2}$ , donc on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ . On en cherche un équivalent. On a pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On somme pour  $1 \leq k \leq n$  :

$$S_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq S_n.$$

Or  $\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n+1} - 2$ , on obtient donc :

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq (2\sqrt{n} - 2) + 1 = 2\sqrt{n} - 1.$$

Ainsi  $S_n \sim 2\sqrt{n}$ , et on a  $\sum_{k=1}^n = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ .

**Exercice.** Formule de Stirling.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

## 2.3 Comparaison à une série géométrique

### Propriété 12 (Règle de d'Alembert)

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs. On suppose que  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0, +\infty]$ .

- Si  $0 \leq \ell < 1$ , la série converge.
- Si  $\ell > 1$ , la série diverge et  $\lim u_n = +\infty$ .
- Si  $\ell = 1$ , on ne peut pas conclure.

**Preuve.** Supposons que  $0 \leq \ell < 1$ , et montrons que la série  $\sum u_n$  converge. Soit pour cela  $\varepsilon > 0$  tel que  $\ell + \varepsilon < 1$ . Alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$n \geq N \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \varepsilon, \text{ soit encore } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon.$$

On a alors pour tout  $n \geq N$ ,

$$0 \leq u_n \leq \underbrace{\frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \dots \times \frac{u_{N+1}}{u_N}}_{(n-N) \text{ facteurs}} \times u_N \leq (\ell + \varepsilon)^{n-N} u_N.$$

D'où  $0 \leq u_n \leq \frac{u_N}{(\ell + \varepsilon)^N} (\ell + \varepsilon)^n$ . Comme  $\ell + \varepsilon < 1$ ,  $\sum (\ell + \varepsilon)^n$  converge, et donc  $\sum u_n$  aussi.

Le cas  $\ell > 1$  se démontre de la même manière.  $\square$

**Remarque.**  $\sum \frac{1}{n^x}$  vérifie  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \left( \frac{n}{n+1} \right)^x = 1$ . Comme  $\sum \frac{1}{n^x}$  peut être convergente ou divergente, on voit que l'on ne peut pas conclure.

**Exemple.** Étudions la nature de  $\sum \frac{\ln(n)}{2^n}$ . On applique le critère de d'Alembert : pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)}{2 \ln(n)} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Donc la série  $\sum \frac{\ln(n)}{2^n}$  est convergente.

## 2.4 Comparaison à une série de Riemann

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs. Si  $u_n \sim \frac{c}{n^x}$  avec  $c \neq 0$ , alors :

- $\sum u_n$  converge si  $x > 1$  ;
- $\sum u_n$  diverge si  $x \leq 1$ .

Si  $\lim n^x u_n = 0$  ou  $+\infty$ , on peut cependant conclure comme suit.

### Propriété 13

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.

- S'il existe  $x > 1$  tel que  $\lim n^x u_n = 0$ , soit encore si  $u_n = o(1/n^x)$ , alors la série converge ;
- Si  $\lim n u_n = +\infty$ , la série diverge.

**Preuve.**

- S'il existe  $x > 1$  tel que  $u_n = o(1/n^x)$ , comme  $\sum 1/n^x$  converge car  $x > 1$ , on en déduit que  $\sum u_n$  converge aussi.
- Si  $\lim nu_n = +\infty$ , alors  $\frac{1}{n} = o(u_n)$ , et la série harmonique étant divergente, on en déduit que  $\sum u_n$  diverge.

□

**Exercice.** Étude de la série de Bertrand  $\sum \frac{1}{n^x \ln(n)^y}$  où  $x, y \in \mathbb{R}$ .

### 3 Séries absolument convergentes

**Définition.**

On dit qu'une série  $\sum u_n$  est absolument convergente si la série à termes positifs  $\sum |u_n|$  est convergente.

**Remarque.** Grâce à cette notion, on se ramène à l'étude d'une série à termes positifs pour laquelle on peut appliquer tous les résultats de la section précédente.

**Exemples de séries absolument convergentes.**

- $\sum z^n$  est absolument convergente pour  $|z| < 1$ .
- $\sum \frac{z^n}{n!}$  est absolument convergente pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

**Propriété 14** (Condition suffisante de convergence)

Pour qu'une série  $\sum u_n$  converge, il **suffit** qu'elle soit absolument convergente.

**Preuve.**

- Supposons tout d'abord que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .  
Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad u_n^- = \begin{cases} -u_n & \text{si } u_n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors  $u_n = u_n^+ - u_n^-$ ,  $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$  et  $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ . Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, comme  $\sum |u_n|$  converge,  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  convergent. Ainsi  $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$  converge.

- Supposons maintenant  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|Re(u_n)| \leq |u_n|$  et  $|Im(u_n)| \leq |u_n|$ . Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, comme  $\sum |u_n|$  converge,  $\sum |Re(u_n)|$  et  $\sum |Im(u_n)|$  convergent. D'après le point précédent,  $\sum Re(u_n)$  et  $\sum Im(u_n)$  convergent. Ainsi  $\sum u_n = \sum (Re(u_n) + iIm(u_n))$  converge.

□

**Exemple de série convergente, mais non absolument convergente**

Considérons la série harmonique alternée  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ . Cette série n'est pas absolument convergente puisque :

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{n} \text{ terme général de la série harmonique qui diverge.}$$

La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  est cependant convergente car :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= H_{2n} - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = H_{2n} - H_n \\ &= (\ln(2n) + \gamma + o(1)) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) = \ln(2) + o(1) \end{aligned}$$

Donc  $\lim S_{2n} = \ln(2)$ , et  $\lim S_{2n+1} = \lim \left( S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \ln(2)$ . Ainsi la série harmonique alternée n'est pas absolument convergente, mais elle est convergente et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

On parle de *série semi-convergente*.

### Exercice.

- Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$  converge.

En effet, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\left| \frac{e^{in}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ . Or, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge. D'où la convergence absolue et donc la convergence de  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$ .

- Étudier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{e^n}$ . Pour tout  $n \geq 1$ , posons  $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{e^n}$ . On

a :  $|u_n| = \frac{\ln n}{e^n}$ . Ainsi, par croissances comparées, on a  $n^2 |u_n| = \frac{n^2 \ln n}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi,  $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que  $\sum |u_n|$  est convergente. Ainsi,  $\sum u_n$  est absolument convergente et donc convergente.

### Propriété 15

Soient deux séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ .

(1) Si  $\sum u_n$  converge absolument, alors  $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .

(2) Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent absolument, alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , la série  $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$  converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + |\mu| \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|.$$

**Preuve.**

(1) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$$

Comme les deux séries convergent (car  $\sum u_n$  converge absolument donc converge), en passant cette inégalité à la limite, on a le résultat voulu.

(2) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Toujours en utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\sum_{k=0}^n |\lambda u_k + \mu v_k| \leq |\lambda| \sum_{k=0}^n |u_k| + |\mu| \sum_{k=0}^n |v_k| \leq |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| + |\mu| \sum_{k=0}^{+\infty} |v_k|.$$

Ainsi, les sommes partielles de la série à termes positifs  $\sum |\lambda u_k + \mu v_k|$  sont majorée. Donc cette série converge, et  $\sum \lambda u_k + \mu v_k$  converge absolument. On obtient de plus en passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  dans l'inégalité précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + |\mu| \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|.$$

D'où le résultat. □

**Remarque.** On a ainsi montré que l'ensemble des suites absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

#### Propriété 16

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à valeur dans  $\mathbb{K}$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  **une série à termes positifs**. Si  $u_n = O(v_n)$  et si  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est absolument convergente, donc convergente.

**Preuve.** En effet si  $u_n = O(v_n)$ , alors  $|u_n| = O(v_n)$  et la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} v_n$  entraîne la convergence absolue de la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et donc sa convergence. □

**Exercice.** Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^{3/2} + \cos n}$  converge.

Pour tout  $n \geq 2$ , on a :  $\left| \frac{\sin n}{n^{3/2} + \cos n} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2} - 1}$  et  $\frac{1}{n^{3/2} - 1} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ .

Comme  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$  converge (somme de Riemann avec  $\alpha = \frac{3}{2}$ ),  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{3/2} - 1}$  converge (équivalence du terme général de deux séries à termes positifs). Par comparaison,  $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin n}{n^{3/2} + \cos n}$  converge absolument

donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^{3/2} + \cos n}$  converge absolument. Finalement, on obtient que  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^{3/2} + \cos n}$  converge.

## 4 Critère spécial des séries alternées

### Propriété 17

Soit  $(a_n)$  une **suite réelle décroissante, positive et qui tend vers 0**. Alors la série  $\sum (-1)^n a_n$  converge. De plus :

- les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes (de limite  $S$ ) ;
- le reste  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$  est du signe de son premier terme et lui est inférieur en valeur absolue, soit :

$$\text{signe}(R_n) = (-1)^{n+1} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \right| \leq a_{n+1}.$$

**Preuve.**

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \quad ; \quad S_{2n+1} - S_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0.$$

$$S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n} \geq 0, \text{ de limite nulle.}$$

Donc  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes. Ainsi,  $(S_n)$  est convergente, et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} \leq S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k \leq S_{2n}.$$

On a alors  $R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0$ , et son premier terme est  $(-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \geq 0$ . Ainsi  $(R_{2n})$  est du signe de son premier terme. De plus, on a :

$$|R_{2n}| = |S - S_{2n}| = S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}.$$

Donc  $|R_{2n}|$  est inférieur à la valeur absolue de son premier terme  $a_{2n+1}$ . On procède de même pour  $(R_{2n+1})$  à partir de  $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$ .  $\square$

**Exemple.** On retrouve grâce au critère spécial des séries alternées que  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  converge bien qu'elle ne soit pas absolument convergente.

**Exemple.** Posons  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  et déterminons la nature de  $\sum u_n$ . On ne peut pas appliquer le critère spécial des séries alternées directement, puisque la suite de terme général  $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  n'est pas décroissante ( $|u_{2n}| \leq |u_{2n+1}|$ ).

► Pour obtenir la nature d'une série, il peut être intéressant d'effectuer un développement limité du terme général de la série.

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  est une série alternée, qui converge donc car  $n \mapsto 1/\sqrt{n}$  est positive, décroissante et tend vers 0,  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente, et  $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$  est absolument convergente, donc convergente. De même pour  $\sum o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ .

Finalement, la série  $\sum u_n$  converge.

### Exemple de deux séries équivalentes de natures différentes.

Rappelons que si  $u_n \sim v_n$  et  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont de signe constant, alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature. **Attention, ce n'est plus vrai si on retire l'hypothèse de signes constants** comme le montre l'exemple précédent :  $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  et pourtant  $\sum u_n$  diverge alors que  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  diverge.

## 5 Plan d'étude d'une série numérique

Considérons une série  $\sum u_n$  à termes quelconques. Pour montrer que  $\sum u_n$  converge, on vérifie, dans l'ordre :

- si son terme général tend vers 0.
- si elle est de signe constant :
  - On se ramène à une série à terme général positif.
  - on applique les théorèmes de comparaison/domination/équivalence avec/par des séries de références (géométrique, Riemann, exponentielle)
  - on peut essayer le critère de d'Alembert.
- si elle est de signe quelconque :
  - On étudie la convergence absolue de la série.
  - si la situation s'y prête, on applique le critère des séries alternées.
  - on peut essayer d'effectuer un développement limité de son terme général.

## 6 Développement décimal d'un nombre réel

On s'intéresse ici à l'écriture d'un réel positif sous la forme d'un "nombre à virgule".

L'écriture décimale d'un réel positif  $x$  :

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots$$

conduit naturellement à l'étude de séries de termes général,  $a_n 10^{-n}$ , où  $a_0 \in \mathbb{N}$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n \in ]0, 9]$ .

### Propriété 18

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n \in ]0, 9]$ , alors  $\sum_{n \geq 0} a_n 10^{-n}$  converge.

**Preuve.** En effet, pour  $n \geq 1$ , on a  $0 \leq a_n 10^{-n} \leq 9 \times 10^{-n}$ . Comme  $\sum 9 \times 10^{-n}$  converge (c'est une série géométrique de raison  $10^{-1}$ ),  $\sum a_n 10^{-n}$  converge par le critère de comparaison des séries à termes positifs.  $\square$

**Exemple.** On a  $0,33333\cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} 3 \cdot 10^{-n} = 3 \frac{10^{-1}}{1-10^{-1}} = \frac{1}{3}$ .

De même  $0,9999\cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 9 \frac{10^{-1}}{1-10^{-1}} = 1 = 1,0000\cdots$

Il y a donc plusieurs manières d'écrire un nombre décimal avec une infinité de chiffres derrière la virgule

**Propriété 19** (Développement décimal propre)

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Il existe une unique suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers naturels telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n \in [0, 9]$  et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non stationnaire sur 9, telle que  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 10^{-n}$ . Cette unique écriture est appelée développement décimal propre de  $x$ .

**Remarque.** Le développement décimale  $0,999\cdots$  de 1 sera dit impropre.

**Preuve.** On raisonne par analyse/synthèse.

- Analyse : Supposons avoir  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n \in [0, 9]$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non stationnaire sur 9, telle que  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 10^{-n}$ . Alors  $a_0 = a_0 10^{-0} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 10^{-n} = x$  et comme  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas stationnaire 9,  $x = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n} < a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 9 \times 10^{-n} = a_0 + 1$ . Ainsi  $a_0 = [x]$  par unicité de la partie entière. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a de même :

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \sum_{p=n+1}^{+\infty} 9 \times 10^{-p} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + 10^{-n}$$

donc  $10^n(a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}) \leq 10^n x < 10^n(a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}) + 1$ . Par unicité de la partie entière, on a donc  $10^n(a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}) = [10^n x]$  puis  $a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{[10^n x]}{10^n}$ . Comme on montre de même que  $a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} = \frac{[10^{n-1} x]}{10^{n-1}}$ ,  $a_n = 10^n \left( \frac{[10^n x]}{10^n} - \frac{[10^{n-1} x]}{10^{n-1}} \right) = [10^n x] - 10[10^{n-1} x]$ . On a donc unicité.

- Synthèse : Posons  $a_0 = [x]$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = [10^n x] - 10[10^{n-1} x]$ . Alors  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , comme  $[10^n x] \leq 10^n x < [10^n x] + 1$  et  $[10^{n-1} x] \leq 10^{n-1} x < [10^{n-1} x] + 1$ ,  $10[10^{n-1} x] \leq 10^n x < [10^n x] + 1$ , donc  $10[10^{n-1} x] < [10^n x] + 1$  et comme ce sont des entiers,  $10[10^{n-1} x] \leq [10^n x]$  et  $a_n \geq 0$ . De même  $[10^n x] \leq 10^n x < 10([10^{n-1} x] + 1)$  donc  $[10^n x] < 10[10^{n-1} x] + 10$  et comme ce sont des entiers  $[10^n x] \leq 10[10^{n-1} x] + 9$  donc  $a_n \leq 9$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $p_n = \sum_{k=0}^n a_k 10^{-k}$  et  $q_n = \sum_{k=0}^n a_k 10^{-k} + 10^{-n}$ . On a alors

$$p_n = \sum_{k=0}^n a_k 10^{-k} = [x] + \sum_{k=1}^n (10^{-k} [10^k x] - 10^{-k+1} [10^{k-1} x]) = [x] + 10^{-n} [10^n x] - [x] = \frac{[10^n x]}{10^n}$$

par télescopage. De même  $q_n = \frac{[10^n x] + 1}{10^n}$ . On a vu au chapitre 7 que  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes et convergent vers  $x$ , avec pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n \leq x < q_n$ . Comme  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ , on a  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 10^{-n}$ . Enfin, supposons que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit stationnaire 9 à partir du rang  $k$ .

On a alors

$$x = \sum_{n=0}^{k-1} a_n 10^{-n} + \sum_{n=k}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-n} = p_{k-1} + 10^{-k+1} = q_{k-1}$$

or  $x < q_{k-1} \dots$  absurde ! Ainsi  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas stationnaire égale à 9 à partir d'un certain rang et on a l'existence. □

### Propriété 20

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $x$  est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

#### Preuve.

- Supposons  $x$  rationnel. On écrit  $x = \frac{a}{b} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n 10^{-n}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on écrit  $10^k a = bq_k + r_k$  la division euclidienne de  $10^k a$  par  $b$ . Comme les  $r_k$  sont des éléments de  $[[0, b-1]]$  (ensemble fini), on a  $k < l$  tel que  $r_k = r_l$ . Alors  $\frac{10^l a}{b} - \frac{10^k a}{b} = q_l - q_k \in \mathbb{N}$ , donc  $10^l \frac{a}{b}$  et  $10^k \frac{a}{b}$  ont mêmes chiffres après la virgule (par unicité du développement décimal propre). On a donc  $c_{n+l} = c_{n+k}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , et  $c_{n+(l-k)} = c_n$  à partir du rang  $k$ . La suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc périodique à partir du rang  $k$ .
- Réciproquement, supposons que  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n 10^{-n}$  avec  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $k$ -périodique à partir du rang  $N$ .  
Alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{N-1} c_n 10^{-n} + \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=N+kl}^{N+kl+k-1} c_i 10^{-i} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n 10^{-n} + \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=N}^{N+k-1} c_{i+kl} 10^{-i-kl} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} c_n 10^{-n} + \sum_{l=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=N}^{N+k-1} c_i 10^{-i} \right) 10^{-kl} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n 10^{-n} + \left( \sum_{i=N}^{N+k-1} c_i 10^{-i} \right) \sum_{l=0}^{+\infty} (10^{-k})^l \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} c_n 10^{-n} + \left( \sum_{i=N}^{N+k-1} c_i 10^{-i} \right) \frac{1}{1-10^{-k}} \end{aligned}$$

donc  $x \in \mathbb{Q}$ . □

**Pour approfondir.** La notion de développement décimal propre permet notamment de montrer que  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable, i.e. que  $\mathbb{R}$  n'est pas en bijection avec  $\mathbb{N}$  (contrairement à  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$ ). Les curieux pourront faire une recherche sur le net à partir des mots clefs : preuve de Cantor,  $\mathbb{R}$  non dénombrable, procédé diagonal de Cantor.