Chapitre 22

Matrices et applications linéaires

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
mansuy.mathieu@hotmail.fr

1 Matrice d'une application linéaire

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1.1 Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

Définition.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ un vecteur de E.
On appelle **matrice de x dans la base $\mathcal{B}$** la matrice colonne notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ de ces coefficients dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Remarques. En pratique, on identifiera souvent une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ au n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de ses éléments dans $\mathbb{K}^n$.

Propriété 1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors, l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{\mathcal{B}} : & E & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ (ou } \mathbb{K}^n) \\ & x & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Preuve. L'application $\Phi_{\mathcal{B}}$ est linéaire car les applications coordonnées dans une base le sont. Elle est de plus bijective car la donnée d'un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ détermine un et un seul vecteur de E, à savoir le vecteur $x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$. □

Définition.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$, une famille de vecteurs de E.
On appelle **matrice de la famille** $(u_1, \dots, u_p)$ **dans la base** $\mathcal{B}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ dont la j-ème colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad u_j = \sum_{k=1}^{n} m_{i,j} e_i \text{ pour tout } 1 \leq j \leq p.$$

Exemples.

- Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = I_n$.

- Considérons $E = \mathbb{K}^3$, $\mathcal{B}$ sa base canonique et $x_1 = (1,2,3)$, $x_2 = (2,0,1)$ vecteurs de E.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice. Écrire la matrice des polynômes $P_i(X) = (X+a)^i$ pour tout $0 \leq i \leq n$ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$.

1.2 Matrice d'une application linéaire

Rappel. Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est complètement déterminée par l'image d'une base de E.

Définition.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie p et n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
On appelle **matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$**, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1), \dots, u(e_p))$ de la famille $(u(e_1), ..., u(e_p))$ dans la base $\mathcal{C}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C},}(u) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} m_{i,j} f_i \text{ pour tout } 1 \leq j \leq p.$$

Remarque. $\dim(E)$ = nombre de colonnes de la matrice, $\dim(F)$ = nombre de lignes de la matrice.

Exemple. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ est une base de F, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ définie par :

$$u(e_1) = 5f_1 + 6f_2 \quad ; \quad u(e_2) = -2f_1 + 3f_2 \quad ; \quad u(e_3) = 10f_2.$$

Alors on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

Exemple. Considérons $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto (x+2y, 2x+y, 2y)$, et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}' = ((1,2), (-1,1))$, $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Remarque. La matrice d'une application linéaire dépend des bases choisies au départ et à l'arrivée !

Cas d'un endomorphisme. $E = F$, on prend alors la même base au départ et à l'arrivée $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, et pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on note plus simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$, matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_n$.

Exemple. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_r)$, $\mathcal{B}_G = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ des bases respectives de F et G. Notons $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_{\mathcal{G}})$, base de E adaptée à $E = F \oplus G$.

- Soit p le projecteur sur F dans la direction de G. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

- Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction de G. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Dans la base $\mathcal{B}_2 = (\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F)$, ces endomorphismes ont pour matrices :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(p) = \begin{pmatrix} 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & I_r \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(s) = \begin{pmatrix} -I_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & I_r \end{pmatrix}.$$

Cas d'une forme linéaire. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On prend (1) pour base de $\mathbb{K}$. En notant $a_j = \varphi(e_j)$ pour tout j, on a donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}).$$

Propriété 2

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie rapportés à des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit X la matrice des coordonnées de $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$, Y la matrice des coordonnées de $y = u(x)$ dans $\mathcal{C}$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$. On a :

$$Y = AX.$$

Preuve. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$, $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $(x_1, \dots, x_p)$ (resp. $(y_1, \dots, y_n)$) les coordonnées de x (resp. y) dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$). On a

$$\begin{cases} y = u(x) = u(\sum\limits_{j=1}^{p} x_j e_j) = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \right) f_i \\ y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i f_i. \end{cases}$$

Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, on en déduit que pour tout $i \in [|1, n|]$, $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$. □

Exemple. Considérons $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x + y, 2y)$. On a :

$$u(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.3 Compatibilité avec les opérations

Propriété 3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies, munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v).$$

Preuve. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A = (a_{i,j})$, $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v) = B = (b_{i,j})$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda u + \mu v) = C = (c_{i,j})$. Pour tout $j \in [|1, p|]$, on a :

$$(\lambda u + muv)(e_j) = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^{n} b_{i,j} f_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) f_i$$

Or, $(\lambda u + muv)(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{i,j} f_i$. Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, on en déduit que pour tout $i \in [|1, n|]$, $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})$, d'où le résultat. □

Propriété 4

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions finies (respectivement p et n), munis respectivement des bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Alors l'application : $\begin{array}{cccc} \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}} & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Preuve. Notons toujours $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$. La linéarité de $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ découle de la proposition précédente. Elle est de plus bijective, car pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on sait[1] qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall 1 \leq j \leq p, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i.$$

□

Conséquence. Si E et F sont de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie, et :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Preuve. On avait déjà obtenu ce résultat dans un précédent chapitre, on le retrouve ici puisque $\mathcal{L}(E, F) \simeq \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et que $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p = \dim(E) \times \dim(F)$. □

Propriété 5

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies munis respectivement des bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u).$$

Preuve. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_q)$ et $\mathcal{B}'' = (e''_1, \ldots, e''_n)$, $A = (a_{k,j})_{1 \leq k \leq q, 1 \leq j \leq p} = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$, $B = (b_{i,k})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq q} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v)$ et $C = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(v \circ u)$. Pour tout $j \in [|1, p|]$, on a $(v \circ u)(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{i,j} e''_i$. D'autre part :

$$v \circ u(e_j) = v \left(\sum_{k=1}^{q} a_{k,j} e'_k \right) = \sum_{k=1}^{q} a_{k,j} v(e'_k) = \sum_{k=1}^{q} a_{k,j} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{i,k} e''_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{q} a_{k,j} b_{i,k} \right) e''_j.$$

[1] définition d'une application linéaire à partir d'une base

Par unicité des coordonnées, on a ainsi pour tout $(i,j) \in [|1,n|] \times [|1,p|]$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{k,j} b_{i,k}$. Ainsi, on a bien $B \times A = C$. □

Exercice. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $f(x,y) = (3x+6y, -x-2y)$. Écrire la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et en déduire que f est un projecteur.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad M^2 = M.$$

Comme $M^2 = M$, alors $f \circ f = f$ et f est bien un projecteur.

Propriété 6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$

u est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est inversible.

On a alors $\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(u^{-1}\right)$.

Preuve.

$\Rightarrow$ Supposons u inversible. On a $u^{-1} \circ u = id_E$ et $u \circ u^{-1} = id_F$. On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(u^{-1}\right).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(u\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\left(id_E\right) = I_n$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(u\right).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(u^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}\left(id_F\right) = I_n$$

ce qui prouve que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est inversible, d'inverse $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(u^{-1}\right)$.

$\Leftarrow$ Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ et supposons A inversible. Soit $v \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(v) = A^{-1}$ (un tel morphisme existe puisque $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont isomorphes). Comme $AA^{-1} = I_n$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(id_F)$$

i.e. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(id_F)$. Ainsi on a bien $u \circ v = id_F$ (toujours parce que $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont isomorphes). De même, $v \circ u = id_E$, donc u et v sont bijective, réciproques l'une de l'autre. u est donc un isomorphisme.

□

Exercice. Considérons la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer l'endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est M.

b) En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}.

Remarque. L'inversibilité de M pouvait se déduire directement, puisque M est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

Propriété 7

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base E et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ est inversible si et seulement si $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.

Preuve. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme vérifiant $\forall k \in [|1, n|]$, $u(e_k) = u_k$. On a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, d'où :

$$\begin{aligned}
\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \text{ inversible } &\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow u \text{ est bijectif} \\
&\Leftrightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n)) = (u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E.
\end{aligned}$$

□

Exemple. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts, $(L_0, \dots, L_n)$ les polynômes de Lagrange associés. On rappelle que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a :

$$P = P(a_0)L_0 + \cdots + P(a_n)L_n.$$

La matrice de la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ des polynômes de Lagrange est donc :

$$M(a_0, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $M(a_0, \dots, a_n)$ est inversible si $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.

1.4 Changement de base

Définition.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, on appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Exemple. Dans le plan vectoriel, la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2) à la base $(u(\theta), v(\theta))$ où $u(\theta) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ et $v(\theta) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$ est :

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Propriété 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

(1) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)$.

(2) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$.

(3) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

Preuve.

(1) Notons $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Par définition, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(id_E(e'_1), \dots, id_E(e'_n)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, ..., e'_n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

(2) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(id_E) = I_n$.

(3) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(id_E) = I_n$. Ainsi $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

□

Propriété 9

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. Notons $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, X la matrice des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, X' la matrice des coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$. On a :

$$X = PX'.$$

Preuve. On a $PX' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(id_E(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. □

Propriété 10

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Notons $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$, on a :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Preuve. On peut s'aider du diagramme suivant pour mémoriser la formule et pour la démontrer:

$$\begin{tikzcd}
E_{\mathcal{B}} \arrow[r, "u"] & F_{\mathcal{C}} \\
E_{\mathcal{B}'} \arrow[u, "id_E"] \arrow[r, "u"] & F_{\mathcal{C}'} \arrow[u, "id_E"']
\end{tikzcd}$$

$$P_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(id_F)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(id_F \circ u \circ id_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$$

□

Remarque. On dit alors que les matrices A et A' sont équivalentes (on peut vérifier que c'est une relation d'équivalence sur les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).

Cas d'un endomorphisme. $E = F$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Remarque. On dit alors que les matrices A et A' sont semblables (on vérifie là aussi que c'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Cas d'une forme linéaire. E un espace vectoriel de dimension p, $F = \mathbb{K}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C} = (1)$ base de $\mathbb{K}$, et $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Notons $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(u)$. Alors :

$$A' = AP \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K}).$$

Exercice. On pose $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 2, 3)$, $F = Vect(v_1, v_2), G = Vect(v_3)$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   On pose alors $F = Vect(v_1, v_2), G = Vect(v_3)$, de sorte que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

b) Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction de G. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.

c) Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

d) En déduire l'expression de s.

Exercice. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (10x - y - z, -6x + 9y - 3z, -2x - y + 11z) \end{array}$$

a) Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)$, où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1, 3, 1), (1, 0, -2), (0, 1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution.

a) On a directement $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -6 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

b) Notons $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On applique la méthode de Gauss Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

On en déduit que $P \sim_{\mathcal{L}} I_n$, donc P est inversible, et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi $P = P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$, et P^{-1} se lit dans le membre de droite de a matrice augmentée.

On utilise la formule de changement de base : $B = P^{-1}AP$. Ainsi, après calcul, on obtient :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

c) B étant une matrice diagonale, on obtient $B^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 12^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PB^nP^{-1}$. Après calcul, on en déduit :

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (2.6^n + 4.12^n) & (6^n - 12^n) & (6^n - 12^n) \\ 6(6^n - 12^n) & 3(6^n - 12^n) & 3(6^n - 12^n) \\ 2(6^n - 12^n) & (6^n - 12^n) & (6^n - 5.12^n) \end{pmatrix}$$

2 Noyau, image et rang d'une matrice

2.1 Définitions

Définition.

Soit $A = (a_{i,j})_{i\in[|1,n|],j\in[|1,p|]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à la matrice A l'application

$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}.$$

Remarque. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La matrice dans les bases canoniques de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de u_A coïncide avec A.

Définition.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, u_A l'application linéaire canoniquement associée à A.

- On appelle noyau de A et on note $KerA$ le noyau de u_A.
- On appelle image de A en note ImA l'image de u_A.
- On appelle rang de A, et on note $rg(A)$, la dimension de $Im(A)$.

Propriété 11

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est égal au rang de la famille $(C_1, ..., C_n)$ des colonnes de A. Ainsi :

$$rgA = rg(C_1, ..., C_n).$$

Preuve. Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Par définition du rang d'une matrice, on a :

$$rg(A) = rg(u_A) = rg(u_A(e_1), \dots, u_A(e_p)) = rg(Ae_1, \dots, Ae_p) = rg(C_1, ..., C_n).$$

□

Propriété 12

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- $rg(A) \leq \min(n, p)$.
- Théorème du rang : $p = \dim(KerA) + rg(A)$.

Preuve. Découle directement des propriétés déjà démontrées pour u_A □

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminons $Ker(A), Im(A), rg(A)$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$(x,y,z) \in KerA \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -7y + 3z = 0 \\ -7y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y + z \\ y = \frac{3}{7}z \end{cases}$$

Ainsi $KerA$ est de dimension 1 et une base de $Ker(A)$ est $((1, 3, 7))$. Par le théorème du rang, $rg(A) = 2$, et comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre. Ainsi, une base de l'image de A est $((1, 3, 4), (2, -1, 1))$.

Propriété 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les équivalences suivantes :

$$A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad Ker(A) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad Im(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \Leftrightarrow \quad rg(A) = n.$$

Preuve. A est inversible si et seulement si son application linéaire canoniquement associée u_A est bijective, si et seulement si elle est injective ($KerA = 0$) si et seulement si elle est surjective ($Im(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) ssi $rg(A) = n$. □

2.2 Calcul du rang

Propriété 14

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$.

(1) $rg(QA) = rg(A) = rg(AP)$.

(2) Si $A \sim_{\mathcal{L}} B$ ou $A \sim_{\mathcal{C}} B$, $rg(A) = rg(B)$.

Ainsi, le rang d'une matrice est invariant lorsque l'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes.

Preuve.

(1) Notons u, v et w les applications linéaires canoniquement associées à A, P et Q. Notons $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Alors $AP = \text{Mat}_{\mathcal{B}^p,\mathcal{B}^n}(u)\text{Mat}_{\mathcal{B}^p}(v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}^p,\mathcal{B}^n}(u \circ v)$. Ainsi, $u \circ v$ est canoniquement associée à AP, De même, $w \circ u$ est canoniquement associée à QA. Comme P et Q sont inversibles, v et w sont des isomorphismes. On a alors vu dans un chapitre précédent que $rg(u \circ v) = rg(u) = rg(u \circ w)$, donc $rg(AP) = rg(A) = rg(QA)$.

(2) Si $A \sim_{\mathcal{L}} B$ ou $A \sim_{\mathcal{C}} B$, $rg(A) = rg(B)$.

(3) Si $A \sim_{\mathcal{L}} B$, il existe E produit de matrices d'opérations élémentaires telle que $B = EA$. Comme les E est inversible, on obtient $rg(B) = rg(A)$.

□

Propriété 15

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est le nombre de pivots non nuls dans l'unique matrice R réduite échelonnée par lignes telle que $A \sim_{\mathcal{L}} R$.

Preuve. Par la proposition précédente, on a $rg(A) = rg(R)$. Notons r le nombre de pivots non nuls dans $R = (b_{i,j})$. On a :

$$R = \begin{pmatrix} b_{1,j_1} = 1 & \cdots & 0 & & 0 & \\ 0 & & b_{2,j_2} = 1 & \cdots & & \\ & & 0 & & 0 & \\ & & & & b_{r,j_r} = 1 & \cdots \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par permutations des colonnes de R, on obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

puis en annulant les coefficients sur les $p - r$ dernières colonnes :

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $R \sim_{\mathcal{C}} J_r$ et on a $rg(A) = rg(R) = rg(J_r) = r$: en effet si on note $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de J_r, on a :

$$rg(J_r) = \dim Vect(C_1, \ldots, C_p) = \dim Vect(C_1, \ldots, C_r) = r.$$

□

Remarque. Le rang d'une matrice A est donc le rang du système linéaire homogène associée à A.

Notation. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq r \leq \min(n, p)$. On définit la matrice $J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

On a montré que $rg(J_r) = r$.

Propriété 16

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $0 \leq r \leq \min(n, p)$. Alors on a :

$$rg(A) = r \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est équivalente à } J_r.$$

Ainsi les classes d'équivalences dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pour la relation "être équivalente à" sont paramétrées par le rang $0 \leq r \leq \min(n, p)$.

Preuve.

- $\Leftarrow$ Supposons que A est équivalente à la matrice J_r. Alors il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$, $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $A = QJ_rP$. Dès lors :

$$rg(A) = rg(Q^{-1}J_rP) = rg(Q^{-1}J_r) = rg(J_r) = r.$$

- $\Rightarrow$ Supposons que $rg(A) = r =$ nombre de pivot dans la matrice échelonnée réduite R telle que $A \sim_{\mathcal{L}} R$. On a vu alors que $R \sim_{\mathcal{C}} J_r$. On en déduit ainsi qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_p(\mathbb{K})$ tel que :

$$A = QR = QJ_rP.$$

  Ainsi A est bien équivalente à J_r.

$\square$

Exemple. Calculer le rang r de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et déterminer U, V tels que $UAV = J_r$.

Exemple. Calculer le rang et l'inverse s'il existe de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Propriété 17

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $rg(A) = rg({}^tA)$.

Preuve. Notons $r = rg(A)$. D'après la proposition précédente, il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$, $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $A = QJ_rP$. En prenant la transposée, on obtient ${}^tA =^t P^tJ_r^tQ$. Or ${}^tP \in GL_p(\mathbb{K})$, ${}^tQ \in GL_n(\mathbb{K})$, et donc ${}^tA$ est équivalente à ${}^tJ_r \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}$. Par la proposition précédente, on a donc $rg({}^tA) = rg({}^tJ_r) = r$. $\square$

Conséquence. Si on note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A, on a :

$$rg(A) = rg(L_1, \dots, L_n).$$

Exemple. On a vu que

$$M(a_0, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

est inversible si $a_0, \dots a_n$ sont deux à deux distincts. Réciproquement, supposons qu'il existe $0 \leq i < j \leq n$ tels que $a_i = a_j$. Alors les lignes L_i et L_j de $M(a_0, \dots, a_n)$ sont identiques, et $rg(A) \leq n-1 < n$. Donc $M(a_0, \dots, a_n)$ n'est pas inversible. On a ainsi montré que :

$$M(a_0, \dots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad a_0, \dots, a_n \text{ sont deux à deux distincts.}$$