Chapitre 23

Déterminant

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
mansuy.mathieu@hotmail.fr

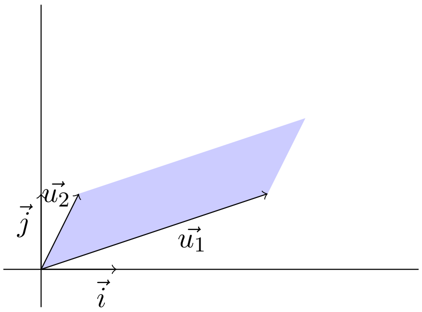
Introduction

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique que l'on note $(\vec{i},\vec{j})$.
Soit $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ le parallélogramme porté par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}} = \{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \mid \alpha,\beta \in [0,1]\}$$

On note $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}})$ l'aire algébrique de $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ c'est à dire que l'aire de $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ est comptée :

- positivement si une mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ appartient à $[0,\pi]$.
- négativement si une mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ appartient à $]-\pi,0[$.



Propriété 1

Soit $\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{v_1},\vec{v_2} \in \mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

(1) $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u_1}+\vec{u_2},\vec{v_1}}) = \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u_1},\vec{v_1}}) + \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u_2},\vec{v_1}})$

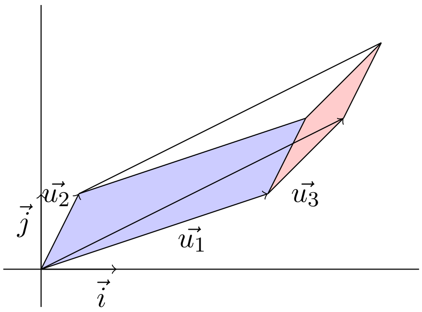
(2) $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\lambda\vec{u_1},\vec{v_1}}) = \lambda\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u_1},\vec{v_1}})$

(3) $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{v_1},\vec{u_1}}) = -\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u_1},\vec{v_1}})$

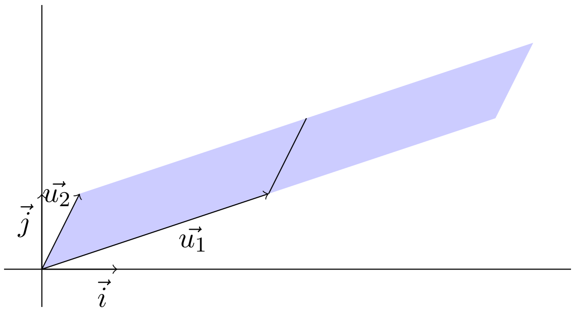
(4) $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u_1},\vec{u_1}}) = 0$

(5) $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{i},\vec{j}}) = 1$.

Preuve.



(1)



(2)

$\square$

Corollaire.

(6) $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u_1},\lambda\vec{v_1}}) = \lambda\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u_1},\vec{v_1}})$

(7) $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u_1},\vec{v_1}+\vec{v_2}}) = \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u_1},\vec{v_1}}) + \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u_1},\vec{v_2}})$

Généralisons ceci en dimension finie quelconque.

1 Déterminant d'une matrice carrée

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n sera un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Dans toute cette section, on identifiera la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec le n-uplet de ses colonnes $(C_1(A), \dots, C_n(A)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n$. En particulier, pour $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera indifféremment $f(A)$ ou $f(C_1(A), \dots, C_n(A))$ la valeur prise par f en A.

Définition.

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application. On dit que :

- f est **multilinéaire** si f est linéaire par rapport à chaque colonne des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour tout $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pour tout $j \in [|1, n|]$,
$$X \mapsto f(C_1, \dots, C_{j-1}, X, C_{j+1}, \dots, C_n)$$
est linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
- f est **antisymétrique** si pour tout $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pour tout $1 \leq i < j \leq n$,
$$f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n).$$
- f est **alternée** si pour tout $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pour tout $1 \leq i < j \leq n$,
$$C_i = C_j \quad \Rightarrow \quad f(C_1, \dots, C_n) = 0.$$

Exemple. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \mathcal{A}(\mathcal{P}_{(a,c),(b,d)}) \end{array}$ est multilinéaire (bilinéaire), antisymétrique et alternée.

Propriété 2

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application multilinéaire. On a l'équivalence suivante :
$$f \text{ est antisymétrique} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est alternée .}$$

Preuve.

$\Rightarrow$ Soient $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Supposons que $C_i = C_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$, alors :
$$f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) = -f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n).$$
Donc $2f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = 0$ et $f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = 0$.

$\Leftarrow$ Supposons que f est alternée. Considérons $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $1 \leq i < j \leq n$. On a :
$$\begin{aligned} 0 &= f(C_1, \dots, C_i + C_j, \dots, C_i + C_j, \dots C_n) \\ &= f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i + C_j, \dots C_n) + f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i + C_j, \dots C_n) \\ &= f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i, \dots C_n) + f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots C_n) + f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots C_n) \\ &\quad + f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_j, \dots C_n) \\ &= f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots C_n) + f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots C_n) \end{aligned}$$
Ainsi, on a bien $f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$.

$\square$

Propriété 3

Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- f est **multilinéaire** ;
- f est **antisymétrique** (et donc alternée également) ;
- $f(I_n) = 1$.

Définition.

Cette application est appelée **déterminant** et notée det. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A) \in \mathbb{K}$ est appelé le déterminant de la matrice A.

Notation. Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, on note $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

Preuve pour $n = 2$. On raisonne par analyse-synthèse :

- Analyse. Supposons qu'une telle application $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ existe, et soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Notons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{aligned} f(A) &= f((ae_1 + ce_2), be_1 + de_2) \\ &= abf(e_1, e_1) + adf(e_1, e_2) + cbf(e_2, e_1) + cdf(e_2, e_2) \\ &= (ad - bc)f(I_2) = ad - bc \end{aligned}$$

- Synthèse. On vérifie sans difficulté que $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$ est bien une application multilinéaire, antisymétrique et telle que $f(I_2) = 1$.

$\square$

Propriété 4

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On a :

$$\det(A) = ad - bc.$$

Exercice. Déterminer l'expression explicite de det pour $n = 3$.

- Analyse. Supposons avoir f qui convient. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$. Par linéarité par rapport à chaque colonne, on a :

$$\begin{aligned}
f(A) &= x_1 f\begin{pmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 0 & y_2 & z_2 \\ 0 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} + x_2 f\begin{pmatrix} 0 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 0 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} + x_3 f\begin{pmatrix} 0 & y_1 & z_1 \\ 0 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \\
&= x_1y_1 f\begin{pmatrix} 1 & 1 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} + x_1y_2 f\begin{pmatrix} 1 & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} + x_1y_3 f\begin{pmatrix} 1 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ 0 & 1 & z_3 \end{pmatrix} \\
&\quad + x_2y_1 f\begin{pmatrix} 0 & 1 & z_1 \\ 1 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} + x_2y_2 f\begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 1 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} + x_2y_3 f\begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 1 & 0 & z_2 \\ 0 & 1 & z_3 \end{pmatrix} \\
&\quad + x_3y_1 f\begin{pmatrix} 0 & 1 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ 1 & 0 & z_3 \end{pmatrix} + x_3y_2 f\begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 1 & 0 & z_3 \end{pmatrix} + x_3y_3 f\begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ 1 & 1 & z_3 \end{pmatrix} \\
&= x_1y_2z_3 f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1y_3z_2 f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2y_1z_3 f\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2y_3z_1 f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + x_3y_1z_2 f\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3y_2z_1 f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1) f(I_3) \\
&= x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1
\end{aligned}$$

donc on a unicité.

- Synthèse. Posons $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1$. On vérifie ensuite que f est linéaire et antisymétrique par rapport aux colonnes, et que $f(I_3) = 1$ donc on a existence.

Remarque. Pour $n \geq 2$ quelconque, on a l'expression explicite suivante du déterminant d'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n},$$

ou la somme est prise sur l'ensemble des bijections (permutations) de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même, et où ε est ce qu'on appelle la signature de σ. Cette formule n'est pas à savoir (hors programme), mais il est intéressant de retenir que $\det(A)$ est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice A. Un déterminant est ainsi continu, de classe $\mathcal{C}^k$... si les coefficients le sont.

Remarque.

- Considérons f : $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \mathcal{A}(\mathcal{P}_{(a,c),(b,d)}) \end{array}$. On a vu que f est multilinéaire (par rapport à chacune de ses colonnes), antisymétrique. De plus f vérifie $f(I_n) = 1$. Par unicité, on a donc $f = \det$. Ainsi en notant $\vec{u} = (a, c), \vec{v} = (b, d) \in \mathbb{R}^2$, on en déduit que $\det(A)$ est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$: $\det(A) = \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}})$.

- Dans $\mathbb{R}^3$: soit $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3), \vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ et $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$. On peut montrer que $\left|\det\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right)\right|$ est le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$.

Donnons les premières propriétés sur le déterminant d'une matrice.

Propriété 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carré.

(1) Si une colonne de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.

(2) Si deux colonnes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$.

(3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$ (Attention à ne pas se tromper ici !)

Preuve. Les points (1) et (3) découlent immédiatement de la multilinéarité, le point (2) découle de det alternée. $\square$

2 Propriétés du déterminant

2.1 Opérations élémentaires

Rappel. Matrices d'opérations élémentaires.
Pour $1 \leq i, j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a défini les matrices d'opérations élémentaires suivantes :

- matrice de dilatation ($\lambda \neq 0$) : $D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- matrice de transposition : $P_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- matrice de transvection : $T_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & \lambda & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 6

Soit $1 \leq i, j \leq n$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

(1) $det(AD_i(\lambda)) = \lambda \det(A)$ ($\lambda \neq 0$) ;

(2) $\det(AP_{i,j}) = -\det(A)$;

(3) $\det(AT_{i,j}(\lambda)) = \det(A)$.

Preuve.

(1) $AD_i(\lambda)$ est la matrice obtenue en appliquant $C_i \leftarrow \lambda C_i$ à A. Par multilinéarité de det, on a bien $det(AD_i(\lambda)) = \lambda \det(A)$.

(2) $AP_{i,j}$ est la matrice obtenue en appliquant $C_i \leftrightarrow C_j$ à A. Par antisymétrie de det, on a bien $\det(AP_{i,j}) = -\det(A)$

(3) $AT_{i,j}(\lambda)$ est la matrice obtenue en appliquant $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ à A. Par multilinéarité de det qui est alternée, on a bien $\det(AT_{i,j}(\lambda)) = \det(A)$.

□

Remarque. Pour $A = I_n$, on obtient :

$$\det(D_i(\lambda)) = \lambda \quad ; \quad \det(P_{i,j}) = -1 \quad ; \quad \det(T_{i,j}(\lambda)) = 1.$$

En particulier si E est une matrice d'opération élémentaire, alors $\det(E) \neq 0$ et pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A \times E) = \det(A) \times \det(E)$.

Propriété 7 (Déterminant d'une matrice triangulaire)

Soit $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) ou diagonale. Alors :

$$\det(T) = t_{1,1}t_{2,2}\dots t_{n,n}.$$

Preuve. Traitons le cas où T est triangulaire supérieure (la preuve est la même si T est triangulaire inférieure). La preuve consiste à appliquer l'algorithme de Gauss sur les colonnes de T.
En utilisant la linéarité sur la première colonne et les opérations élémentaires, on obtient :

$$\begin{vmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \dots & t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{n,n} \end{vmatrix} = t_{1,1} \times \begin{vmatrix} 1 & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \dots & t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{n,n} \end{vmatrix} \underset{C_i \leftarrow C_i - t_{1,i}C_1}{=} t_{1,1} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{2,2} & \dots & t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{n,n} \end{vmatrix}$$

En poursuivant l'algorithme de Gauss sur les colonnes de T, on obtient ainsi :

$$\begin{vmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \dots & t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{n,n} \end{vmatrix} = t_{1,1}t_{2,2}\dots t_{n,n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = t_{1,1}t_{2,2}\dots t_{n,n}.$$

□

▶ *Pour calculer le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on applique l'algorithme de Gauss sur les colonnes de la matrice. On se ramène ainsi à une matrice échelonnée triangulaire inférieure (inutile de la réduire) dont le calcul du déterminant est aisé.*

Exemple. Calculer le déterminant des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$
- $det(B) = 32.$

Exercice. Calculer $\begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$.

$$\Delta \underset{C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^n C_i}{=} \begin{vmatrix} a+n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a+1+n & a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+n+1 & 1 & \dots & a & 1 \\ a+n+1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix} = (a+n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_i \leftarrow C_i - C_1}{=} (a+n+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

2.2 Inversibilité

Théorème 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0.$$

Preuve.

- $\Rightarrow$ Supposons que A soit inversible. Alors on sait que A est produit de matrices d'opérations élémentaires : il existe $E_1, \dots, E_k$ matrices d'opérations élémentaires telles que $A = E_1 \times \cdots \times E_k$. On en déduit alors que :

$$\det(A) = \det(E_1 \times \cdots \times E_k) = \det(E_1 \times \cdots \times E_{k-1}) \det(E_k) = \cdots = \det(E_1) \times \cdots \times \det(E_k) \neq 0.$$

- $\Leftarrow$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On sait qu'il existe une matrice R échelonnée réduite par colonnes et $E = E_1 \times \cdots \times E_k$ un produit de matrices d'opérations élémentaires telles que :

$$A = RE.$$

Supposons que A ne soit pas inversible, alors le nombre de pivots dans la matrice R est $< n$. En d'autres termes, R contient au moins une colonne nulle, et $\det(R) = 0$. On obtient alors :

$$\det(A) = \det(RE) = \det(R) \times \det(E_1) \times \cdots \times \det(E_n) = 0.$$

$\square$

Exemple. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont inversibles.

La matrice $C_a = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\det(C_a) = (a+n-1)(a-1)^{n-1} \neq 0$ soit si et seulement si $a \neq 1$ et $a \neq 1-n$.

Remarque. On retrouve ici qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ces coefficients diagonaux sont non nuls.

2.3 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On appelle matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice notée $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

- On appelle déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, le déterminant $\det(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))$.

Propriété 9

L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}, (v_1, \dots, v_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$ satisfait les propriétés suivantes :

(1) $\det_{\mathcal{B}}$ est multilinéaire, c'est à dire $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chacun des n vecteurs ;

(2) $\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique : il change de signe lorsqu'on permute deux vecteurs ;

(3) $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée : il est nul si deux vecteurs sont égaux ;

(4) $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Preuve. Les trois premiers points découlent de la définition même de $\det_{\mathcal{B}}$ et des propriétés analogues satisfaites par le déterminant d'une matrice. Pour le dernier point, il suffit de noter que $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$, et donc $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \det(I_n) = 1$. □

Théorème 10

Avec les notations précédentes, on a l'équivalence :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow \quad det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0.$$

Preuve.

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow \quad Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) \neq 0.$$

□

Exemples. Montrer que $((1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $\begin{vmatrix} \cos(a_1 + a_1) & \cos(a_1 + a_2) & \dots & \cos(a_1 + a_n) \\ \cos(a_2 + a_1) & \cos(a_2 + a_2) & \dots & \cos(a_2 + a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(a_n + a_1) & \cos(a_n + a_2) & \dots & \cos(a_n + a_n) \end{vmatrix} = 0.$

Il suffit de noter que toutes les colonnes de ce déterminant appartiennent au sous-espace $Vect(C, S)$ avec $C = (\cos(a_1), \ldots, \cos(a_n))$, $S = (\sin(a_1), \ldots, \sin(a_n))$.

Interprétation géométrique du déterminant d'une famille de vecteurs
On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$. Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$. Alors $|\det_{\mathcal{B}}(u, v)|$ est l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs u et v.
Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ des vecteurs, alors $|det_{\mathcal{B}}(u, v, w)|$ est le volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs.

Remarques. On retrouve en particulier le théorème précédent : (u, v) est une base ssi u et v ne sont pas colinéaires, ssi le parallélogramme est non aplati, ssi son aire est > 0, ssi $|det_{\mathcal{B}}(u, v)| \neq 0$.

2.4 Déterminant d'un produit

Remarque. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a déjà montré que si E est une matrice d'opération élémentaire, ou plus généralement un produit de telles matrices, alors :

$$\det(A \times E) = \det(A) \times \det(E).$$

Propriété 11

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B).$$

En particulier si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Preuve. Si B est inversible, le résultat découle de la remarque précédente en se rappelant que toute matrice inversible peut s'écrire comme produit de matrices d'opérations élémentaires. Si B n'est pas inversible, alors $A \times B$ n'est pas inversible non plus[1], et l'identité est immédiate puisque $\det(AB) = 0 = \det(B)$.
Enfin si A est inversible, alors :

$$\det(A) \times \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1.$$

$\square$

Attention. $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Corolaire. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$. On a :

$$\det(A^p) = \det(A)^p$$

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

Remarque. $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$. Notons cependant qu'en général $AB \neq BA$!

[1] Précisons pourquoi $A \times B$ est non inversible : si B est non inversible, il existe $X_0 \in \mathbb{K}^n$, $X_0 \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ tel que $BX_0 = 0_{\mathbb{K}^n}$. Mais alors $A \times B \times X_0 = 0_{\mathbb{K}^n}$ et donc $A \times B$ est non inversible.

2.5 Déterminant de la transposée

Propriété 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :
$$\det({}^tA) = \det(A).$$

Preuve. Supposons que A soit non inversible. Alors ${}^tA$ est non inversible également et l'égalité est satisfaite.
Supposons que A soit une matrice d'opération élémentaire, alors on vérifie sans difficulté que $\det({}^tA) = \det(A)$.
Supposons à présent que A soit inversible. On sait alors que A est produit de matrices d'opérations élémentaires $E_1, \dots, E_k$. Alors :

$$\det({}^tA) = \det({}^tE_k \times \cdots \times {}^t E_1) = \det({}^tE_k) \times \cdots \times \det({}^tE_1) = \det(E_k) \times \cdots \times \det(E_1) = \det(A).$$

□

Conséquence. Les propriétés du déterminant, valables sur les colonnes d'une matrice, le sont également sur ses lignes, en d'autres termes :

- $\det(M)$ est multilinéaire par rapport à chacune des lignes de la variable-matrice ;
- det est antisymétrique et alternée en les lignes de la matrice.

En particulier, il est également possible de faire des opérations élémentaires sur les lignes d'un déterminant, avec les mêmes règles de calcul que pour les colonnes.

2.6 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Lemme. $\begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,n} & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n-1,n} & \dots & m_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$

Preuve. Considérons l'application suivante :

$$f : \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, A \mapsto \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Alors f est multilinéaire, antisymétrique et vérifie $f(I_{n-1}) = 1$. Par unicité d'une telle application, on obtient $f = \det$. D'où finalement :

$$\begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,n} & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n-1,n} & \dots & m_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

□

Remarque. On obtient un résultat analogue en transposant.

Définition.

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on appelle mineur d'indice (i, j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en rayant dans M la ligne i et la colonne j.

Propriété 13

Pour toute matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut calculer le déterminant de M :

- par développement suivant la j-ème colonne :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

- par développement suivant la i-ème ligne :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

Preuve. On le montre pour la première formule. On a :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix} &= \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & 0 & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & 1 & \dots & m_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & 0 & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-j} m_{i,j} \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & \dots & m_{1,n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & \dots & m_{i,n} & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & \dots & m_{n,n} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-j} (-1)^{n-i} m_{i,j} \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & \dots & m_{1,n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & \dots & m_{n,n} & 0 \\ m_{i,1} & \dots & \dots & m_{i,n} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}
\end{aligned}$$

□

Exemple. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la colonne 3, puis par rapport à la ligne 2.

Remarque. Complexité de l'algorithme de calcul du déterminant.
Ces formules ramènent le calcul d'un déterminant d'ordre n à celui de n déterminants d'ordre $n-1$. Si u_n est le nombre d'opérations pour calculer un déterminant d'ordre n, on a donc :

$$u_n = n u_{n-1} + n \geq n u_{n-1}.$$

D'où $u_n \geq \frac{n!}{2} u_2 = \frac{3}{2} n!$. Ainsi cet algorithme est rapidement explosif en nombre d'opérations. Ces formules ne sont donc pas exploitable en pratique (sauf pour $n = 3$). En pratique, on se ramène toujours, grâce à l'algorithme de Gauss, au déterminant d'une matrice triangulaire, ce qui nécessite $O(n^3)$ opérations.

Quelques chiffres. Une modeste matrice 25×25, on a $25! \approx 1,5 \times 10^{25}$ opérations. Un ordinateur téraflops, c'est-à-dire capable d'effectuer 10^{12} opérations en virgule flottante par seconde aurait besoin d'au moins 500000 ans de fonctionnement ininterrompu pour effectuer ce calcul.
Ce chiffre est à comparer avec le nombre d'opérations de la méthode de Gauss. Dans ce cas, l'ordre est de 10^5 opérations, que le même ordinateur effectuera en $0,1$ millionièmes de secondes.
À titre d'information, l'ordinateur le plus puissant du monde en 2004[2] (composé de 32768 processeurs) atteint une puissance maximale de 70,72 téraflops. Il s'en tirerait en 70500 ans seulement... Avec une matrice 26×26, ce chiffre passe à 1833000 années de calcul.

Remarque. Par une récurrence évidente et à l'aide de ces formules, on retrouve ici que le déterminant d'une matrice est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice.

3 Déterminant d'un endomorphisme

Lemme. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f\mathcal{L}(E)$. Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors :

$$\det(Mat_{\mathcal{B}}(f)) = \det(Mat_{\mathcal{B}'}(f)).$$

En particulier, le scalaire $\det(Mat_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend que de f, et pas de la base $\mathcal{B}$ de E choisie.

Preuve. Notons $A = Mat_{\mathcal{B}}(f))$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$, et soit $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors on a $A' = P^{-1}AP$ et donc en prenant le déterminant :

$$\det(A') = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A).$$

□

Définition.

On appelle déterminant de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, et on note $\det(f)$, le déterminant de la matrice de f dans n'importe quelle base de E.

Remarque. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors :

$$\det(f) = det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Ainsi $|\det(f)|$ est le coefficient par lequel f multiplie les volumes.

Exemples.

- $\det(Id_E) = det_{\mathcal{B}}(Id_E(e_1), \ldots, Id_E(e_n)) = det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1.$
- $\det(\lambda Id_E) = det_{\mathcal{B}}(\lambda e_1, \ldots, \lambda e_n) = \lambda^n.$
- Soit p la projection sur F dans la direction de $G \neq \{0_E\}$. En prenant $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base adaptée à la somme direct $E = F \oplus G$, on obtient :

  $$\det(p) = det_{\mathcal{B}}(p(e_1), \ldots, p(e_p), p(e_{p+1}), \ldots, p(e_n)) = det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_p, 0_E, \ldots, 0_E) = 0.$$

- Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction de G. En prenant $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base adaptée à la somme direct $E = F \oplus G$, on obtient :

  $$\det(s) = det_{\mathcal{B}}(s(e_1), \ldots, s(e_p), s(e_{p+1}), \ldots, s(e_n)) = det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_p, -e_{p+1}, \ldots, -e_n) = (-1)^{n-p}.$$

[2] Le gouvernement américain espère franchir la barre de l'exaflops (10^{18} opérations) dans les prochaines années.

Propriété 14

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

(1) $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$;

(2) f est un automorphisme $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$.

Et si f est bijective, alors $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Preuve. Toutes ces propriétés découlent directement de celles démontrées pour le déterminant d'une matrice. □

4 Autres applications des déterminants

4.1 Systèmes linéaires

On considère un système linéaire $MX = B$ de n équations à n inconnues, avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle que ce système est dit de Cramer s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(1) M est de rang n ;

(2) $M \sim_{\mathcal{L}} I_n$;

(3) $M \sim_{\mathcal{C}} I_n$;

(4) $M \in GL_n(\mathbb{K})$;

(5) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $MX = B$ admet une unique solution ;

(6) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $MX = B$ admet au moins une solution ;

(7) Le système $MX = 0_{n,1}$ admet une unique solution.

L'unique solution de ce système est alors $X = M^{-1}B$.

Propriété 15

Le système linéaire $MX = B$ est de Cramer si et seulement si $\det(M) \neq 0$.

On donne à présent des formules précisant la solution unique d'un tel système.

Propriété 16 (Formules de Cramer)

Pour toute matrice carrée inversible $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la solution $X = (x_1, \ldots, x_n)$ du système de Cramer $MX = B$ est donnée par :

$$\forall k = 1, \ldots, n, \quad x_k = \frac{\det(C_1(M), \ldots, B, \ldots, C_n(M))}{\det(M)}.$$

Preuve. L'unique solution X du système de Cramer $MX = B$ vérifie :

$$x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = B.$$

On obtient alors (avec B en position k) :

$$\begin{aligned}
\det(C_1,\ldots,B,\ldots,C_n) &= \det(C_1,\ldots,\sum_{j=1}^{n} x_jC_j,\ldots,C_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(C_1,\ldots,C_j,\ldots,C_n) \\
&= x_k \det(C_1,\ldots,C_k,\ldots,C_n) = x_k \det(M).
\end{aligned}$$

Comme $\det(M) \neq 0$, on obtient le résultat souhaité. □

Remarque. Ces formules n'ont pas d'intérêt pratique, puisqu'elles nécessitent le calcul de déterminants couteux en opérations, alors que l'inversion d'une matrice (et donc la résolution du système) nécessite $O(n^3)$ opérations. Elle ont en revanche un intérêt théorique car elles permettent, lorsque le système dépend d'un paramètre, d'étudier la continuité, dérivabilité, ... des solutions en fonction de ce paramètre.

4.2 Équation des hyperplans vectoriels

Propriété 17

Soit E de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $H = Vect(v_2,\ldots,v_n)$ un hyperplan de E. Alors pour tout $v \in E$:

$$v \in H \quad \Leftrightarrow det_{\mathcal{B}}(v,v_2,\ldots,v_n) = 0.$$

Preuve. Tout d'abord, notons que $(v_2,\ldots,v_n)$ est une famille libre par hypothèse. Dès lors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
det_{\mathcal{B}}(v,v_2,\ldots,v_n) = 0 &\Leftrightarrow (v,v_2,\ldots,v_n) \text{ est liée} \\
&\Leftrightarrow v \in Vect(v_2,\ldots,v_n) = H.
\end{aligned}$$

□

Remaque. Ainsi H est le noyau de la forme linéaire non nulle :

$$\varphi : v \in E \mapsto det_{\mathcal{B}}(v,v_2,\ldots,v_n),$$

et H est défini par l'équation linéaire $\varphi(v) = 0$.

Exemple. Déterminer l'équation cartésienne :

- du plan vectoriel dirigé par les vecteurs $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (1,1,1)$.
- du plan passant par les points $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ et $C = (0,0,1)$.