Chapitre 24

Probabilités générales

1 Généralités **2**

1.1 Expérience aléatoire et univers 2

1.2 Espaces probabilisés finis 3

2 Probabilités conditionnelles **6**

2.1 Définition 6

2.2 Formules fondamentales 8

3 Indépendance **12**

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Généralités

1.1 Expérience aléatoire et univers

Définition.

- Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.
- On appelle univers l'ensemble, souvent noté Ω, de tous les résultats possibles.
- Un élément de cet ensemble Ω est appelé une éventualité, un possible, ou une issue et généralement noté ω.

Remarque. Les probabilités au programme de PCSI sont les probabilités dîtes finies, c'est à dire qu'on supposera pour cette année que Ω est un ensemble **fini**. Pour information, il y a également des probabilités dîtes discrètes (Ω ensemble fini ou dénombrable - par exemple $\Omega = \mathbb{N}$ - au programme de deuxième année) et des probabilités continues (Ω intervalle de $\mathbb{R}$ - hors programme en classes préparatoires scientifiques).

Exemple.

- Le lancer d'une pièce est une expérience aléatoire dont l'univers des possibles est $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$.
- Le lancer d'un dé à 6 faces est une expérience aléatoire dont l'univers des possibles est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition.

Soit Ω un univers fini. Toute partie de Ω est appelée un événement. L'ensemble des événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

- Ω est appelé événement certain.
- $\emptyset$ est appelé événement impossible.
- Un singleton $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$, est appelé un événement élémentaire.

Exemple. Dans le tirage du dé à 6 faces, on peut considérer l'événement : "Le résultat est pair". Il correspond à l'ensemble $A = \{2, 4, 6\}$.

Définition.

Soit Ω un univers fini, A et B deux événements.

- Le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{A}$, est appelé événement contraire.
- La réunion $A \cup B$ de A et B est un événement, appelé A ou B.
- L'intersection $A \cap B$ de A et B est un événement, appelé A et B.

Exemple. Considérons l'expérience consistant à lancer deux fois une pièce, modélisée par l'univers $\{P, F\}^2$. Notons A l'événement "la première pièce montre pile" et B l'événement "la deuxième pièce montre pile" , c'est-à-dire $A = \{(P, P), (P, F)\}$ et $B = \{(F, P), (P, P)\}$.

- L'événement $A \cup B$ est "une des deux pièces montre pile" :

$$A \cup B = \{(F, P), (P, F), (P, P)\}$$

- L'événement $A \cap B$ est "les deux pièces montrent pile" :

$$A \cup B = \{(P,P)\}$$

- L'événement contraire de A est "la première pièce montre face" :

$$A \cup B = \{(F,P),(F,F)\}$$

Définition.

Soit Ω un univers, A et B deux événements de Ω.

- Les événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- On dit que l'événement A implique l'événement B si $A \subset B$.

Définition.

Soit Ω un univers fini. On appelle système complets d'événements de Ω toute famille $(A_1,\dots,A_n)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) d'événements telle que :

- pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $[|1,n|]$, on ait $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Remarques.

- Pour tout événement $A \subset \Omega$, la famille $(A,\overline{A})$ est un système complet d'événements de Ω.
- La famille $(\{x\})_{\omega\in\Omega}$ formée des événements élémentaires, est un système complet d'événements de Ω.

1.2 Espaces probabilisés finis

Définition.

Soit Ω un univers fini. On appelle probabilité sur Ω une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- pour tous événements incompatibles A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On appelle espace probabilisé fini un couple $(\Omega,\mathbb{P})$ où Ω est un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

Remarque. Le deuxième point se généralise par une récurrence immédiate : si $(A_1,\dots,A_p)$ sont des événements incompatibles, $\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_p) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_p)$.

Exemple. On considère le lancer d'un dé à 6 faces. L'univers est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

- Une probabilité sur Ω est $\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_1 : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \to & \frac{1}{6}Card(A) \end{array}$ (dé non pipé).
- On peut aussi définir $\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_2 : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \to & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } 6 \notin A \\ 1 & \text{si } 6 \in A \end{array} \right. \end{array}$ (dé pipé pour tomber sur 6 à tous les coups).

Propriété 1

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements. On a :

(1) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(2) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(3) Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
De plus, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

(4) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Preuve.

(1) Comme A et $\overline{A}$ sont incompatibles, $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ et donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(2) On a $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\overline{\Omega}) = 1 - 1 = 0$.

(3) Si $A \subset B$ alors B est la réunion des événements incompatibles A et $B \setminus A$ et donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$. Comme $\mathbb{P}(B \setminus A) \geq 0$, on en déduit que $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(4) L'événement $A \cup B$ est la réunion des deux événements incompatibles A et $B \setminus A$; d'autre part, B est la réunion des événements incompatibles $A \cap B$ et $B \setminus A$. On a donc :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$\square$

Propriété 2

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements et soit B un événement quelconque. Alors:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

En particulier avec $B = \Omega$, on obtient :

$$1 = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

Preuve. Puisque $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$. On peut écrire:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega) = \mathbb{P}(B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)) = \mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i))$$

Or, par définition d'un système complet, les A_i sont deux à deux incompatibles. Les $B \cap A_i$ le sont donc aussi, et on a bien finalement:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

$\square$

Exercice. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A et B des événements. On considère l'événement C : "A ou B se réalise, mais pas les deux". Déterminer $P(C)$.

Propriété 3

Soit $A_1, \dots, A_p$ sont des événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On a

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_p) \leq \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_p)$$

Preuve. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(p)$ correspondant à l'énoncé. On a immédiatement $\mathcal{P}(1)$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie. Soient $A_1, \dots, A_{p+1}$ des événements. On note $B = A_1 \cup \dots \cup A_p$. Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_{p+1}) = \mathbb{P}(B \cup A_{p+1}) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{p+1}) - \mathbb{P}(B \cap A_{p+1}) \leq \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{p+1})$$

car $\mathbb{P}(B \cap A_{p+1}) \geq 0$. Par hypothèse de récurrence, $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_p)$. Ainsi $\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_{p+1}) \leq \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_{p+1})$ et $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
En conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(p)$ est vraie. □

Propriété 4

Soit $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ et $p_1, ..., p_n$ des réels. On a l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(1) Il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que : $\forall i \in [|1, n|]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

(2) Tous les réels p_i sont positifs et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Dans ce cas, la probabilité $\mathbb{P}$ est unique et on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [|1,n|] \\ \text{tels que } \omega_i \in A}} p_i$$

Preuve.

(1) ⇒ (2) Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω telle que : $\forall i \in [|1, n|]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$. $\mathbb{P}$ est à valeurs dans $[0, 1]$ donc tous les p_i sont positifs. De plus, $(\{w_i\})$ est un système complet d'événements donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1$.

(2) ⇒ (1) On raisonne par analyse synthèse.

- Analyse : Supposons avoir une probabilité $\mathbb{P}$ qui convienne. Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $A = \displaystyle\bigcup_{\substack{i \in [|1,n|] \\ \text{tel que } \omega_i \in A}} \{\omega_i\}$. Les événements $(\{\omega_i\})_{\substack{i \in [|1,n|] \\ \text{tel que } \omega_i \in A}}$ sont deux à deux disjoints, donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [|1,n|] \\ \text{tel que } \omega_i \in A}} p_i = \sum_{\substack{i \in [|1,n|] \\ \text{tel que } \omega_i \in A}} p_i$$

- Synthèse : On pose $\begin{array}{rccc} \mathbb{P} : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \displaystyle\sum_{\substack{i \in [|1,n|] \\ \text{tel que } \omega_i \in A}} p_i \end{array}$. $\mathbb{P}$ est bien définie car pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, comme les p_i sont positifs,

$$0 \leq p(A) = \sum_{\substack{i \in [|1,n|] \\ \text{tel que } \omega_i \in A}} p_i \leq \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

On a $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
Soient A et B deux événements incompatibles. Comme $A \cap B = \emptyset$, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{\substack{i \in [|1,n|] \\ \text{tel que } \omega_i \in A \cup B}} p_i = \sum_{\substack{i \in [|1,n|] \\ \text{tel que } \omega_i \in A}} p_i + \sum_{\substack{i \in [|1,n|] \\ \text{tel que } \omega_i \in B}} p_i = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

donc $\mathbb{P}$ est une probabilité. Ainsi on a existence.

□

Application. Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un univers fini. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que : $\forall i \in [|1,n|]$, $P(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$.

Définition.

Cette probabilité est appelée probabilité uniforme sur Ω. On dit aussi alors qu'on se trouve dans un cas **équiprobable**

Remarque. Dans le cas équiprobable, on a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)},$$

soit encore :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

ATTENTION, cette formule n'est valable que pour les cas équiprobables. Elle fonctionne dans l'exemple du dé normal, mais pas dans celui du dé truqué.

Exemple. On lance un dé équilibré à 6 faces. La probabilité de tirer un nombre pair est $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice. On considère 6 dés non pipés de couleurs différentes (donc discernables). Quelle est la probabilité que toutes les faces donnent un chiffre différent ?

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Définition

Exemple. Considérons le lancé d'un dé équilibré. Notons A l'événement "on obtient un 2" et B l'événement "on n'obtient pas 1". L'événement $A \cap B$ est égal à A car si on obtient 2 et pas 1, c'est qu'on a obtenu 2 tout court. Donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$. De plus, $\mathbb{P}(B) = 5/6$ car il y a 5 résultats favorables sur 6 si on n'obtient pas 1.

Supposons maintenant qu'on sache que B est vérifié, c'est-à-dire qu'on n'a pas obtenu 1. Dans ce cas, la probabilité d'obtenir 2 est de $1/5$, car il n'y a plus que 5 résultats possibles (et on est toujours dans un cas équiprobable). On remarque que cette probabilité vaut exactement $\mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$. C'est ce qu'on appelle une probabilité conditionnelle.

Définition.

Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle** de A sachant B (c'est-à-dire sachant que B est réalisé), notée $\mathbb{P}(A/B)$ le quotient:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Propriété 5

Pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, l'application

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{P}_B : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω, appelée probabilité conditionnelle à B.

Preuve.

- L'application $\mathbb{P}_B$ est bien définie par $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Pour tout événement A, on a $A \cap B \subset B$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ et par suite
  $0 \leq \mathbb{P}_B(A) \leq 1$.
- On a $\mathbb{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.
- Soient A et A' deux événements incompatibles. Alors $A \cap B$ et $A' \cap B$ sont également incompatibles, donc
$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}((A \cup A') \cap B)}{\mathbb{P}(B)} &= \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A' \cap B))}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A' \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A' \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A'). \end{aligned}$$

Ainsi P_B définit une probabilité sur Ω. □

Exercice. On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille.

- Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille ?
- Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

Chaque composition de la famille peut être représenté par un couple (x, y) avec $x, y \in \{F, G\}$, x représentant l'aine et y le second enfant. On a donc $\Omega = \{F, G\}^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme.
On considère les événements A "l'ainé est une fille", B "les deux enfants sont des filles" et C "il y au moins une fille". On remarque que ces événements ont une probabilité non nulle. La première probabilité demandée est :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

La seconde probabilité demandée est :

$$P_C(B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{1 - \mathbb{P}(\overline{C})} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

car $\overline{C}$ est l'événement "les deux enfants sont des garçons".

2.2 Formules fondamentales

Formule des probabilités composées

Le plus souvent, on ne calcule pas $\mathbb{P}_B(A)$ à partir de $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(B)$. Au contraire, c'est la connaissance de $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}(B)$ qui permet le calcul de $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Propriété 6

Pour tous les événements A et B d'un espace probabilisé, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) \quad \text{si } \mathbb{P}(B) \neq 0$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) \quad \text{si } \mathbb{P}(A) \neq 0$$

Exemple. Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires?

On note N_i, pour $i = 1, 2$, l'événement "on tire une boule noire au i-ème tirage". On obtient :

$$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

car avant le second tirage, l'urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires.

Propriété 7 (Formule des probabilités composées)

Soit $n \geq 2$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors[a]

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

[a] Toutes les probabilités conditionnelles sont bien définies grâce à l'hypothèse $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ par croissance de l'application $\mathbb{P}$.

Preuve. On montre par récurrence sur $n \geq 2$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ correspondant à l'énoncé.

Soient A_1 et A_2 des événements tels que $\mathbb{P}(A_1) > 0$. Alors $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)$ par définition des probabilités conditionnelles, donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$. On a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)\mathbb{P}(A_{n+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \mathbb{P}(A_{n+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

par hypothèse de récurrence. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

En conclusion, pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

Exemple. Dans une urne 4 boules blanches 2 boules noires indiscernables au toucher, on tire 3 boules successivement sans remise. On cherche à déterminer la probabilité de N "tirer une boule noire pour la première fois au troisième tirage".

Notons B_i l'événement "on pioche une boule blanche au i-ième tirage" a $N = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B}_3$.

$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(\overline{B}_3|B_1 \cap B_2) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}.$$

Formule des probabilités totales

Propriété 8 (Formule des probabilités totales)

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ tel que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) P(A_i)$$

Preuve. Comme les A_i sont deux à deux incompatibles, il en est de même des $B \cap A_i$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

On obtient donc en utilisant la définition de probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

□

Exemple. Dans une usine, on fabrique des composants électroniques sur trois machines. Les machines M_1, M_2 et M_3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% des composants. Un qualiticien de l'usine estime que:

- 2% des composants fabriqués par la machine M_1 sont défectueux,
- 3% des composants fabriqués par la machine M_2 sont défectueux,
- 5% des composants fabriqués par la machine M_3 sont défectueux.

a) Quelle est la probabilité qu'un composant pris au hasard à la sortie de l'usine soit défectueux?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir une pièce défectueuse provenant de M_1?

c) Un composant est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de M_1?

En appliquant le résultat précédent avec le système complet d'événement $(A, \overline{A})$, on obtient le

Corolaire. Pour tous événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$$

Si $0 < \mathbb{P}(A) < 1$, on obtient :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\mathbb{P}(\overline{A})$$

Exemple. X et Y s'entraîne au tir à l'arc. X atteint la cible 9 fois sur 10, Y atteint la cible 6 fois sur 10. Y joue deux fois sur 3. Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?

Notons C l'événement "la cible est atteinte", J_X (resp. J_Y) "le joueur est X (resp. Y)". Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|J_X)\mathbb{P}(J_X) + \mathbb{P}(C|J_Y)\mathbb{P}(J_Y) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{10}.$$

Exercice. Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil possédant une maintenance obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité a de toujours fonctionner à la date n.
- s'il est en passe à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité b d'être encore en panne à la date n

où (a,b) est un couple de réels de $]0,1[$. On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'événement "l'appareil est en état de marche à la date n" et p_n la probabilité de M_n.

a) Déterminer p_n pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer la limite de (p_n)

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons une relation de récurrence entre p_{n-1} et p_n. On applique la formule des probabilités totales. On a, si $0 < \mathbb{P}(M_{n-1}) < 1$:

$$P(M_n) = P(M_n|M_{n-1})P(M_{n-1}) + P(M_n|\overline{M}_{n-1})P(\overline{M}_{n-1})$$

Par hypothèse :

$$\mathbb{P}(M_n|M_{n-1}) = a \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}(\overline{M}_n|\overline{M}_{n-1}) = b$$

d'où $\mathbb{P}(M_n|\overline{M}_{n-1}) = 1-b$. On obtient donc :

$$p_n = ap_{n-1} + (1-b)(1-p_{n-1}) = (a+b-1)p_{n-1} + 1 - b$$

Cette égalité reste vérifiée si $\mathbb{P}(M_{n-1}) = 0$, car alors :

$$\mathbb{P}(M_n \cap M_{n-1}) = 0 = ap_{n-1} \quad \text{ et de même si } \mathbb{P}(M_{n-1}) = 1$$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmético-géométrique. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha = (a+b-1)\alpha + 1 - b \quad &\iff \quad (a+b-2)\alpha = b-1 \\ &\iff \quad \alpha = \frac{b-1}{a+b-2} \quad \text{car } a+b-2 \neq 0 \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \dfrac{b-1}{a+b-2}$. La suite $(p_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $a+b-1$. On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n - \alpha = (a+b-1)^n(p_0 - \alpha)$, c'est à dire

$$p_n = \frac{1-b}{2-a-b} + (a+b-1)^n \frac{1-a}{2-a-b}$$

b) Comme $a+b-1 \in]-1,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (a+b-1)^n = 0$. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1-b}{2-a-b}$.

Remarque. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B|\overline{A})$$

ce qui résulte de la formule des probabilités totales.

Formule de Bayes

Propriété 9 (Formule de Bayes)

- Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$
- Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ tel que pour tout $i \in [|1, n|]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a pour tout $i \in [|1, n|]$:
$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}.$$
- En particulier, pour tous événements A et B tels que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a:
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})}$$

Preuve.

- On a $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$, d'où la première formule.
- Soit $1 \leq j \leq n$, $\mathbb{P}(A_j|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(B)}$. Comme $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$ par la formule des probabilités totales, la seconde formule s'en déduit immédiatement.
- La dernière égalité est un cas particulier de la précédente, où le système d'événements est $(A, \overline{A})$.

$\square$

Exemple. L'un des joueurs a atteint la cible. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de Y ? On cherche donc à calculer $\mathbb{P}(J_Y|C)$. Par la formule de Bayes,
$$\mathbb{P}(J_Y|C) = \frac{\mathbb{P}(C|J_Y)\mathbb{P}(J_Y)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{6}{10} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}.$$

Exemple. Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test qui détecte 99% des malades, et qui donne $0,2\%$ de faux positifs chez une personne saine. Une personne est contrôlée positive. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ? Notons T l'événement "le test est positif", et M "la personne est malade". On cherche à calculer $\mathbb{P}(M|T)$. Par la formule de Bayes, on a
$$\mathbb{P}(M|T) = \frac{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T|\overline{M})\mathbb{P}(\overline{M})} = \frac{\frac{99}{100} \times \frac{1}{1000}}{\frac{99}{100} \times \frac{1}{1000} + \frac{2}{1000}\frac{999}{1000}} = \frac{990}{2988} = \frac{495}{1494}.$$

Exercice. Dans un jeu télévisé, trois portes sont fermées. Derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres, un porte-clé. Le candidat choisit l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle pote cache la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve un porte-clé. Il propose alors au candidat de changer de porte. Que doit faire le candidat ?

Notons P_1, P_2 et P_3 les portes, P_1 celle que le candidat a choisi. On note V_i l'événement "la voiture est derrière la porte i" et O_i l'événement "le présentateur a ouvert la porte i". On a $\mathbb{P}(O_2|V_1) =$

$\mathbb{P}(O_3|V_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(O_2|V_2) = \mathbb{P}(O_3|V_3) = 0$ et $\mathbb{P}(O_2|V_3) = \mathbb{P}(O_3|V_2) = 1$. Ainsi, la probabilité que la voiture soit derrière la porte 3 sachant que le présentateur a ouvert la porte 2 est

$$\mathbb{P}(V_3|O_2) = \frac{\mathbb{P}(O_2|V_3)\mathbb{P}(V_3)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(O_2|V_i)\mathbb{P}(V_i)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Le candidat doit donc changer son choix.

3 Indépendance

Définition.

Deux événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sont dits **indépendants** si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Remarque. Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

Exemple. On lance deux dés. On considère les événements A "le premier dé donne un numéro pair" et B "le deuxième dé donne 3". Montrons que les événements A et B sont indépendants.

On choisit $\Omega = [|1, 6|]^2$, muni de la probabilité uniforme. On trouve $CardA = 3 \times 6 = 18$ et donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$, $CardB = 6$ et donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$. Comme $A \cap B = \{(2,3), (4,3), (6,3)\}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Les événements A et B sont indépendants.

Propriété 10

Soit A et B deux événements. Alors on a:

1. $A \coprod A \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
2. $A \coprod B \Longleftrightarrow A \coprod \overline{B} \Longleftrightarrow \overline{A} \coprod B \Longleftrightarrow \overline{A} \coprod \overline{B}$.

Preuve.

1. $A \coprod A \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}^2(A) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
2. Il suffit de montrer la première équivalence, les autres sont alors automatiques.

$$\begin{array}{lllll} A \coprod B & \Longleftrightarrow & \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) & \Longleftrightarrow & \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(\overline{B}) \\ & \Longleftrightarrow & \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) & \Longleftrightarrow & \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ & \Longleftrightarrow & \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) & \Longleftrightarrow & A \coprod \overline{B}. \end{array}$$

□

Définition.

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants (ou indépendants) si pour tout sous-ensemble I de $[|1, n|]$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

ATTENTION, le fait que les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont indépendants entraîne qu'ils sont indépendants deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Exemple. On lance deux fois de suite un dé à 6 faces équilibré. On définit les événements :

A:"le premier lancer donne un chiffre pair"
B:"le deuxième lancer donne un chiffre impair"
C:"l'un des lancer donne un chiffre pair, l'autre un chiffre impair"

1. Montrer que les événements A et B sont indépendants, que les événements A et C sont indépendants et que les événements B et C sont indépendants.
2. Les événements A,B et C sont-ils mutuellement indépendants?

Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.
$A = \{2,4,6\} \times [|1,6|]$, $B = [|1,6|] \times \{2,4,6\}$, $C = \{2,4,6\}^2 \cup \{1,3,5\}^2$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3\times 6}{36} = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$A\cap B = A\cap C = B\cap C = \{2,4,6\}^2$, ainsi :

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(B\cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

Enfin, $A\cap B\cap C = A\cap B$. Ainsi,

$$P(A\cap B\cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}.$$

Propriété 11

Soient $A_1,\ldots,A_n$ des événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants. Pour $i\in[|1,n|]$, on note $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$. Alors $B_1,\ldots,B_n$ sont mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.

Preuve. On montre par récurrence sur $p\in[|0,n|]$ la propriété $\mathcal{P}(p)$: "si p des B_i sont $\overline{A_i}$ (et les autres A_i), $B_1,\ldots,B_n$ sont mutuellement indépendants". Les événements $A_1,\ldots,A_n$ étant mutuellement indépendants, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $p\in[|0,n-1|]$ tel que $\mathcal{P}(p)$ est vraie. On suppose que $p+1$ des des B_i sont $\overline{A_i}$ (et les autres A_i). Quitte à remplacer $B_1,\ldots,B_n$ par la sous-famille considérée, il faut montrer que $\mathbb{P}(B_1\cap\ldots B_n) = \mathbb{P}(B_1)\ldots\mathbb{P}(B_n)$. Quitte à réordonner les B_i, on suppose que $B_i = A_i$ pour $i\in[|1,n-p$ et que $B_i = \overline{A_i}$ pour $i\in[|n-p,n|]$. On a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-p}\cap\overline{A_{n-p+1}}\cap\cdots\cap\overline{A_n}) + \mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-p-1}\cap\overline{A_{n-p}}\cap\overline{A_{n-p+1}}\cap\cdots\cap\overline{A_n})\\
=&\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-p-1}\cap\overline{A_{n-p+1}}\cap\cdots\cap\overline{A_n})\\
=&\mathbb{P}(A_1)\ldots P(A_{n-p-1})P(\overline{A_{n-p+1}})\ldots P(\overline{A_n})
\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. Ainsi

$$\begin{aligned}
&P(A_1\cap\cdots\cap A_{n-p-1}\cap\overline{A_{n-p}}\cap\overline{A_{n-p+1}}\cap\cdots\cap\overline{A_n})\\
=&P(A_1)\ldots P(A_{n-p-1})P(\overline{A_{n-p+1}})\ldots P(\overline{A_n}) - P(A_1)\ldots P(A_{n-p})P(\overline{A_{n-p+1}})\ldots P(\overline{A_n})\\
=&P(A_1)\ldots P(A_{n-p-1})P(\overline{A_{n-p+1}})\ldots P(\overline{A_n})(1-P(A_{n-p})\\
=&P(A_1)\ldots P(A_{n-p-1})P(\overline{A_{n-p}})P(\overline{A_{n-p+1}})\ldots P(\overline{A_n})
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
En conclusion, pour tout $p\in[|0,n|]$, $\mathcal{P}(p)$ est vraie. □

Propriété 12

Soit $A_1, \dots, A_n$ sont des événements mutuellement indépendants et soit $p \in [|1, n-1|]$,

- $A_1 \cap \dots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cap \dots \cap A_n$ sont indépendants.
- $A_1 \cup \dots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$ sont indépendants.
- $A_1 \cap \dots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$ sont indépendants.
- $A_1 \cup \dots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cap \dots \cap A_n$ sont indépendants.

Preuve.

- On a, par définition de l'indépendance :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_p)\mathbb{P}(A_{p+1} \cap \dots \cap A_n).$$

- D'après la proposition précédente, $\overline{A_1}, ..., \overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants.
Les événements $A = \overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_p$ et $B = \overline{A_{p+1}} \cap \dots \cap \overline{A_n}$ sont donc indépendants par le premier point. De même $\overline{A} = A_1 \cup ...A_n$ et $\overline{B} = A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$ sont indépendants.
- D'après la proposition précédente $A_1, \dots, A_p, \overline{A_{p+1}}, \dots, \overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants.
Les événements $A = A_1 \cap \dots \cap A_p$ et $B = \overline{A_{p+1}} \cap \dots \cap \overline{A_n}$ sont donc indépendants par le premier point. De même A et $\overline{B} = A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$ sont indépendants.
- Le troisième point se montre le précédent.

$\square$