Chapitre 26

Variables aléatoires

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
mansuy.mathieu@hotmail.fr

1 Variables aléatoires

Dans tout le chapitre $(\Omega, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé fini.

1.1 Définitions

Définition.

On appelle variable aléatoire sur Ω toute application $X : \Omega \to E$ (où E est un ensemble quelconque).
Si $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

Notation. L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega) = \{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$. C'est un sous-ensemble fini de E (dans notre cas, Ω est fini).

Exemples.

- On lance deux dés équilibrés et discernables. Un espace probabilisé adapté est alors $[|1,6|]^2$ muni de la probabilité uniforme. L'application :

$$S \quad \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

  est une variable aléatoire réelle et on a : $S(\Omega) = [|2,12|]$.

- Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément cinq cartes. On peut prendre comme univers Ω l'ensemble des sous-ensembles à 5 éléments de l'ensemble des cartes. L'application X qui à tout tirage associe le nombre de piques obtenu est une variable aléatoire réelle sur Ω et $X(\Omega) = [|0,5|]$.

Notations.

- Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire.
  Si $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \; ; \; X(\omega) \in A\}$.
  Si $x \in E$, on note $\{X = x\}$ ou $(X = x)$ l'événement $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \; ; \; X(\omega) = x\}$.

- Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.
  On note $\{X \leq x\}$ ou $(X \leq x)$ l'événement $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \; ; \; X(\omega) \leq x\}$.

On définit de même les événements $(X < x)$, $(X \geq x)$, $(X > x)$ ou $(X \neq x)$.

Exemple. Avec les notations de l'exemple précédent, l'événement : "la somme des numéros est paire" est donc noté $S \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

Propriété 1

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire sur Ω. L'application

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$. On l'appelle la loi de X.

Preuve.

- L'application $\mathbb{P}_X$ est définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ et à valeurs dans $[0,1]$.

- On a par définition $\{X \in X(\Omega)\} = \Omega$ donc $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = 1$.

- Si A et B sont deux parties disjointes de $X(\Omega)$, alors :

$$\{X \in A\} \cap \{X \in B\} = \emptyset \quad \text{et} \quad \{X \in A\} \cup \{X \in B\} = \{X \in A \cup B\}$$

Les événements $\{A \in A\}$ et $\{X \in B\}$ étant incompatibles,

$$\mathbb{P}_X(A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(A) + \mathbb{P}_X(B)$$

$\square$

Propriété 2

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire.

(1) La famille $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En particulier, $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

(2) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$\{X \in A\} = \bigcup_{x \in A} \{X = x\}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$.

Preuve.

(1) Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in X(\Omega)$, donc $\omega \in \cup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\})$ et $\Omega = \cup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\})$. De plus ces ensembles sont deux à deux distincts : si $\omega \in \{X = x_1\} \cap \{X = x_2\}$, alors $x_2 = X(\omega) = x_1$. Donc $\{X = x_1\} = \{X = x_2\}$.

(2) Il suffit de décomposer l'évènement $\{X \in A\}$ dans le système complet d'évènements $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$.

$\square$

Propriété 3

Soit X une variable aléatoire. La loi de X est déterminé de manière unique par la donnée des $P_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. Plus précisément, on a pour tout $A \subset AX(\Omega)$:

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$$

Preuve. En effet on a vu qu'une probabilité est définie de manière unique par la donnée des probabilités des événements élémentaires (ici les $\{X = x\}$. $\square$

Remarque. L'univers de départ n'a plus d'importance, et il ne sera plus nécessaire de le préciser dans cette situation. Seule la loi de la variable aléatoire est nécessaire pour calculer $\mathbb{P}(X \in A)$.

▶ *Déterminer la loi d'une variable aléatoire X revient à :*

- *Déterminer* $X(\Omega)$

- *Préciser, pour tout $x \in X(\Omega)$, la valeur de $P(X = x)$.*
  Ω est toujours supposé fini (cette année). On peut donc écrire $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$. La loi de X peut être représentée par un tableau de la forme :

$\mathbf{x_i}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$\mathbb{P}(\mathbf{X} = \mathbf{x_i})$	$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\mathbb{P}(X = x_2)$	$\cdots$	$\mathbb{P}(X = x_{n-1})$	$\mathbb{P}(X = x_n)$

Exemple. Reprenons la variable aléatoire S précédente. On a $S(\Omega) = [|2, 12|]$. La loi de S est donnée

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Définition.

Soit $X : \omega \to E$ est une variable aléatoire et $f : E \to F$, $f \circ X$ définit une variable aléatoire sur Ω notée $f(X)$.

Propriété 4

Soit X une variable aléatoire sur Ω et $f : E \to F$. Posons $Y = f(X)$. La loi de Y est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x).$$

Preuve. Soit $y \in Y(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned}\{Y = y\} = \{f(X) = y\} &= \{\omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) = y\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})\\ &= \{X \in f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} \{X = x\}\end{aligned}$$

Or, les événements $\{X = x\}$ avec $x \in f^{-1}(\{y\})$ sont deux à deux incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)$$

□

Exemple. Considérons une variable aléatoire X de loi :

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$

et posons $Y = X^2$. Ainsi, $X(\Omega) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1, 4, 9\}$.
On a alors : $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{4}{20}$, $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{6}{20}$, $\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{6}{20}$ et $\mathbb{P}(Y = 9) = \mathbb{P}(X = -3) + \mathbb{P}(X = 3) = \dfrac{4}{20}$.
Ainsi, la loi de Y est :

x_i	0	1	4	9
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

1.2 Lois usuelles

Variable certaine

Définition.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire. On dit que X est la variable aléatoire certaine égale à a lorsque $X(\Omega) = \{a\}$. On a dans ce cas $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

Loi uniforme

Définition.

Soit X une variable aléatoire. Soit $F = \{x_1, ..., x_n\}$ un ensemble fini de $\mathbb{R}$ de cardinal n.
On dit que X suit la loi uniforme sur F, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(F)$ lorsque :

$$X(\Omega) = F \qquad \forall k \in [|1, n|],\ \mathbb{P}(X = x_k) = \frac{1}{n}$$

Remarque. Cela correspond au cas équiprobable.

Exemple.

- Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On pioche une boule au hasard et on note X le numéro de la boule piochée. X suit une loi uniforme sur $[|1, n|]$.
- Si X est la variable aléatoire représentant le résultat d'un lancer de dés équilibrés, X suit la loi $\mathcal{U}([|1, 6|])$

Loi de Bernoulli

Définition.

Soit X une variable aléatoire sur Ω, on dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ si

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \qquad \mathbb{P}(X = 1) = p \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

Remarque. Considérons une expérience aléatoire ayant deux issues possibles : succès avec probabilités $p \in [0, 1]$ et échec avec la probabilité $1 - p$. Une telle épreuve est appelée épreuve de Bernoulli. Soit X la variable aléatoire égale à 1 en cas de succès et 0 sinon. Alors, X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. De plus si on note A l'événement "l'épreuve est un succès", on a alors $X = \mathbf{1}_A$.

Remarque.

- On lance une pièce qui a probabilité p de tomber sur pile. Soit X la variable aléatoire valant 1 si on tombe sur pile et 0 sinon. X suit la loi $\mathcal{B}(p)$.
- Soit une urne contenant a boules blanches et b boules noires. On note X la variable aléatoire égale à 0 si on a tiré une boule blanche et égale à 1 si on tire une boule noire. X suit la loi $\mathcal{B}(\frac{b}{a+b})$.
- Si A est un événement, $\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$. En effet, $\mathbb{P}(\mathbf{1}_A = 1) = \mathbb{P}(\{\omega \in A\} = \mathbb{P}(A)$.

Loi binomiale

Définition.

Soit X une variable aléatoire sur Ω, on dit que X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, et on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ si

$$X(\Omega) = [|0,n|] \qquad \forall k \in [|0,n|]\ ,\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarques.

- Une loi de Bernoulli est un cas particulier de loi binomiale avec $n = 1$.
- Le nombre X de succès obtenus lors de la répétition de $n \in \mathbb{N}^*$ épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in [0,1]$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ (on prouvera ce résultat un peu plus tard dans le cours).

Exemple. Considérons une urne contenant une proportion p de boules blanches et $1-p$ de boules noires, on effectue n tirages successifs avec remise. La variable aléatoire X représentant le nombre de boules blanches tirées suit alors la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

2 Couple de variables aléatoires

Dans toute la suite, $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ désignent des variables aléatoires, et on notera $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_m\}$.

Définition.

On appelle couple des variables aléatoires X et Y, et on note $Z = (X,Y)$, l'application

$$\begin{array}{rccl} Z : & \Omega & \to & E \times F \\ & \omega & \mapsto & Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Définition.

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires. On appelle loi conjointe de X et Y la loi du couple (X,Y) i.e l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}((X,Y)(\Omega)) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}((X,Y) \in A) \end{array}$$

Propriété 5

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires. La famille $(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})_{(i,j) \in [|1,n|] \times [|1,m|]}$ est un système complet d'événements de Ω.
En particulier, $\displaystyle\sum_{(i,j) \in [|1,n|] \times [|1,m|]} \mathbb{P}\left(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\right) = 1.$

Preuve.

- On a : $\bigcup_{(i,j)\in[|1,n|]\times[|1,m|]} \{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\} \subset \Omega.$

- Réciproquement : soit $\omega \in \Omega$. Si $X(\omega) = \omega \in X(\Omega)$ et $Y(\omega) = y \in Y(\Omega)$, alors $\omega \in \{X = x\} \cap \{Y = y\} \subset \bigcup_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \{X = x\} \cap \{Y = y\}$.

- Enfin, si (x, y) et (x', y') sont deux éléments distincts de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a soit $x \neq x'$ et $\{X = x\} \cap \{X = x'\} = \emptyset$, soit $y \neq y'$ et $\{Y = y\} \cap \{Y = y'\} = \emptyset$. On en déduit :

$$(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \cap \left(\{X' = x'\} \cap \{Y' = y'\}\right) = \emptyset$$

□

Notation. $\{X = x\} \cap \{Y = y\} = \{X = x, Y = y\} = \{(X, Y) = (x, y)\}$.

Remarque. On a $Z(\Omega) = \{(X(\omega), Y(\omega)), \omega \in \Omega\}$. Ainsi, on a : $Z(\Omega) \subset \{(x, y) \mid x \in X(\omega), y \in Y(\Omega)\} = X(\Omega) \times Y(\Omega)$ mais en général, il n'y a pas égalité. Cependant, la loi de $Z = (X, Y)$ est entièrement déterminé par la donnée des $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$ avec $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

► *Déterminer la loi conjointe de deux variables aléatoires X et Y revient à :*

- *Déterminer $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_p\}$.*
- *Déterminer pour tout $(i, j) \in [|1, n|] \times [|1, p|]$, la valeur de $p_{i,j} = \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$.*

  La loi conjointe de deux variables X et Y peut être représenté pas un tableau à double entrée de la forme :

$X\diagdown Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_p
x_1	$\mathbb{P}(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_1\})$	$\mathbb{P}(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_2\})$	$\cdots$	$\mathbb{P}(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_p\})$
x_2	$\mathbb{P}(\{X = x_2\} \cap \{Y = y_1\})$	$\mathbb{P}(\{X = x_2\} \cap \{Y = y_2\})$	$\cdots$	$\mathbb{P}(\{X = x_2\} \cap \{Y = y_p\})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	$\mathbb{P}(\{X = x_n\} \cap \{Y = y_1\})$	$\mathbb{P}(\{X = x_n\} \cap \{Y = y_2\})$	$\cdots$	$\mathbb{P}(\{X = x_n\} \cap \{Y = y_p\})$

Exemples.

- Considérons l'expérience aléatoire consistant à jeter deux dés, X la variable aléatoire donnant le plus petit résultat et Y le plus grand, $Z = (X, Y)$. La loi conjointe de Z est représentée par

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$	$Y = 5$	$Y = 6$
$X = 1$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$X = 2$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$X = 3$	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$X = 4$	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$X = 5$	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
$X = 6$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

  Notons que dans cet exemple, $Z(\Omega) = \{(i, j) \in [|1, 6|]^2 \,;\, i < j\}$, et que seule la partie triangulaire supérieure du tableau était nécessaire pour déterminer la loi de Z.

- Une urne contient 3 boules indiscernables numérotées de 1 à 3. On tire successivement deux boules avec remise, et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus. On pose $X = X_1$ et $Y = \min(X_1, X_2)$. On trouve $X(\Omega) = Y(\Omega) = [|1, 3|]$.
  Soit $(i, j) \in [|1, 3|]^2$.

- Si $i < j$, $\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- Si $i > j$, $\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}) = \frac{1}{9}$ (par indépendance des dexu tirages.
- Si $i = j$, $\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 \in [|i, 3|]\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in [|i,3|]} \{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\right) = \sum_{k=i}^{3} \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\})$ car les événements $\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}$ $(k \in [|i, 3|])$ sont deux à deux incompatibles. Ainsi, $\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \sum_{k=i}^{3} \frac{1}{9} = \frac{4-i}{9}$.

La loi conjointe des variables X et Y peut ainsi être résumée dans le tableaux suivant :

$X \diagdown Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	0
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$

Définition.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On appelle lois marginales du couple (X, Y) les lois de X et Y.

Propriété 6

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoire. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_p\}$. Alors :

$$\forall i \in [|1, n|], \quad p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{j=1}^{p} p_{i,j}$$

$$\forall j[|1, p|], \quad q_j = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}.$$

Preuve. La famille $(\{Y = y_j\})_{j \in [|1,p|]}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne donc :

$$\forall i \in [|1, n|], \ \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$$

□

► *On peut donc déterminer facilement les lois marginales de (X, Y) à partir de la loi conjointe : il suffit de faire la somme des lignes (pour la loi de X) ou des colonnes (pour la loi de Y) du tableau qui la représente.*

Remarque. En revanche, on ne peut pas retrouver la loi conjointe à partir des lois marginales en général (il n'y a pas de lien entre les p_i, q_j et les $p_{i,j}$

Exemples.

- Déterminons les lois marginales du couple dont on déterminé la loi conjointe dans le premier exemple précédent. On obtient que pour tout $i \in [|1,6|]$,

$$\mathbb{P}(X=i)=\sum_{j=1}^{6}\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})=\frac{1}{36}+\sum_{j=i+1}^{6}\frac{1}{18}=\frac{1+2(6-i)}{36}=\frac{13-2i}{36}$$

De même, pour tout j de $[|1,6|]$, on a :

$$\mathbb{P}(X=j)=\sum_{i=1}^{6}\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{2(j-1)+1}{36}=\frac{2j-1}{36}$$

- Reprenons le deuxième exemple précédent et déterminons les lois marginales de X et Y. On trouve :

$X\diagdown Y$	$y_1=1$	$y_2=2$	$y_3=3$	$P(X=x_i)$
$x_1=1$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
$x_2=2$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$x_3=3$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$P(Y=y_j)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	

On obtient ainsi :

x_i	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

y_j	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=x_j)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

On remarque ainsi que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([|1,3|])$.

Définition.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires. Soit $x\in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X=x)\neq 0$.
On appelle loi conditionnelle de Y sachant que $\{X=x\}$ l'application :

$$\begin{array}{rcl} Y(\omega) & \to & [0,1] \\ y & \mapsto & \mathbb{P}(Y=y|X=x)=P_{\{X=x\}}(Y=y)=\dfrac{\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})}{\mathbb{P}(X=x)} \end{array}$$

Remarque. On définit de même la loi conditionnelle de X sachant que $\{Y=y\}$ si $y\in Y(\Omega)$ est tel que $\mathbb{P}(Y=y)\neq 0$.

Propriété 7

Soit (X,Y) un couple de variable aléatoire.
On suppose que, pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$.
Alors, pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\omega)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) &= \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(X = x|Y = y)\\ &= \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y|X = x)\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(X = x|Y = y)$$

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y|X = x)$$

Preuve. Les premières égalités résultent de la définition des probabilités conditionnelles, les deux dernières formules résultent de la formule des probabilités totales appliquée aux systèmes complets d'événements $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$ et $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$. □

Remarque. Connaissant une des lois marginales et la probabilité conditionnelle de l'autre variable, on obtient alors la loi conjointe du couple puis la loi marginale de la deuxième variable.

3 Indépendance de variables aléatoires

3.1 Indépendance de deux variables

Définition.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires. On dit que X et Y sont indépendantes si

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \ , \quad \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

Exemple. Dans le cas d'un tirage avec remise dans une urne, si X est le numéro de la première boule tirée, Y celui de la seconde, les variables X et Y sont indépendantes.

Propriété 8

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, on a :

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X,Y) \in A \times B) &= \sum_{(x,y) \in A \times B} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \sum_{x \in A}\sum_{y \in B} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)\\ &= \left(\sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)\right)\left(\sum_{y \in B} \mathbb{P}(Y = y)\right) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).\end{aligned}$$

□

Propriété 9

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires. Il y a équivalence entre :

(1) X et Y sont indépendantes.

(2) la loi conjointe de X et Y est le produit de leurs lois marginales.

(3) Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la loi conditionnelle de Y sachant que $\{X = x\}$ est égale à la loi de Y.

(4) Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, la loi conditionnelle de X sachant que $\{Y = y\}$ est égale à la loi de X.

Preuve.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) : direct avec la proposition précédente (pour la réciproque, prendre $A = \{x\}, B\{y\}$).

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Supposons (1) vérifié. Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$. On a pour tout $x \in X(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \mathbb{P}(X = x)$$

La loi de X sachant $\{Y = y\}$ est la loi de X.
Réciproquement, supposons (2) vérifié. Soit $y \in Y(\omega)$.

- Si $\mathbb{P}(Y = y) = 0$: pour tout $x \in X(\Omega)$, $\{X = x\} \cap \{Y = y\} \subset \{Y = y\}$ donc par croissance de $\mathbb{P}$, on a $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \leq \mathbb{P}(Y = y) = 0$ donc $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = 0 = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.
- Si $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, pour tout $x \in X(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x|Y = y)\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Les variables X et Y sont donc bien indépendantes.

(1) $\Leftrightarrow$ (4) Il suffit d'échanger X et Y dans la démonstration précédente.

□

Propriété 10 (Image de variables aléatoires indépendantes)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, $f : X(\Omega) \to E$ et $g : Y(\Omega) \to F$. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Preuve. Soit $x \in E$ et $y \in F$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{f(X) = x\} \cap \{g(Y) = y\}) &= \mathbb{P}\left(\{X \in f^{-1}(\{x\})\} \cap \{Y \in g^{-1}(\{y\})\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X \in f^{-1}(\{x\})\right) \mathbb{P}\left(Y \in g^{-1}(\{y\})\right) \\
&= \mathbb{P}(f(X) = x)\mathbb{P}(g(Y) = y)
\end{aligned}$$

Ainsi, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. □

3.2 Indépendance mutuelle, indépendance deux à deux

Définition.

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont dites mutuellement indépendantes (ou indépendantes) si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \ , \ \mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Exemple.

- Dans le cas d'un tirage avec remise dans une urne, si X_i est le numéro de la i-ème boule tirée, $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
- De manière plus générale, si on effectue n fois la même expérience, de manière indépendante, et si X_i est le résultat de la i-ème, $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Propriété 11

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes.

(1) Pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega))$,

$$\mathbb{P}((X_1 \in A_1) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n)) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in A_n).$$

(2) Toute sous-famille de $X_1, \dots, X_n$ est indépendante.

(3) Pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $\{X_i \in A_i\}$ sont mutuellement indépendants. En particulier, pour $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, les événements $[X_1 = x_1], \dots, [X_n = x_n]$ sont mutuellement indépendants.

Preuve.

(1) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X_1 \in A_1) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n)) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{x_1 \in A_1} \{X_1 = x_1\}\right) \cap \dots \cap \left(\bigcup_{x_n \in A_n} \{X_n = x_n\}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{(x_1,\dots,x_n) \in A_1 \times \dots \times A_n} \Big(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}\Big)\right) \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n} \mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}) \\
&= \sum_{x_1 \in A_1} \cdots \sum_{x_n \in A_n} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n) \\
&= \left(\sum_{x_1 \in A_1} \mathbb{P}(X_1 = x_1)\right) \dots \left(\sum_{x_n \in A_n} \mathbb{P}(X_n = x_n)\right) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in A_n).
\end{aligned}$$

(2) Quitte à réordonner $(X_1, \dots, X_n)$, on se donne $(X_1, \dots, X_p)$ sous-famille de $(X_1, \dots, X_n)$ (avec $p \in [|1, n|]$). Pour $(x_1, \dots, x_p) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_p(\Omega)$, on pose $A_i = \{x_i\}$ si $i \in [|1, p|]$ et $A_i = \Omega$

si $i \in [|p+1,n|]$. D'après le point précédent, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_p = x_p]) &= \mathbb{P}((X_1 \in A_1) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n)) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in A_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_p = x_p)\end{aligned}$$

donc $X_1, \dots, X_p$ sont indépendantes.

(3) Le troisième point est direct, à partir des deux précédents.

$\square$

Propriété 12

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes alors elles sont deux à deux indépendantes.

ATTENTION. Comme dans le cas des événements, la réciproque est fausse.

3.3 Application à la loi binomiale

Propriété 13 (Somme de Bernoulli indépendantes)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Remarque. La variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ représente le nombre de succès de n expériences indépendantes ayant probabilité p de réussir. Or on a vu qu'une telle variable suit une loi binomiale. On vérifie ici cela par le calcul.

Preuve. Posons $Y = X_1 + ... + X_n$. Pour tout $i \in [|1,n|]$, $X_i(\Omega) = \{0,1\}$, et $Y(\Omega) = [|0,n|]$. Soit $k \in [|0,n|]$, alors, notons $A_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n \; ; \; x_1 + \cdots + x_n = k\}$. A_k est de cardinal $\binom{n}{k}$ puisqu'il faut choisir k des x_i parmi les n qui ont la valeur 1 (les autres prenant la valeur 0) pour avoir un élément de A_k. Il est alors facile de constater que $(\{X_1 = x_1\} \cap ... \cap \{X_n = x_n\})$ avec $(x_1, ..., x_n) \in A_k$ sont deux à deux incompatibles. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{(x_1,\dots,x_n)\in A_k} \left(\{X_1 = x_1\} \cap ... \cap \{X_n = x_n\}\right)\right) &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in A_k} \mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]) \\ &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in A_k} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in A_k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

car parmi les x_i, k valent 1 donc k des $\mathbb{P}(X_i = x_i)$ valent p, $n-k$ valent 0 donc les $n-k$ autres $\mathbb{P}(X_i = x_i)$ valent $1-p$. Ainsi $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$. $\square$

4 Espérance

4.1 Définition et propriétés

Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle, on appelle espérance de X et on note $\mathbb{E}(X)$ le réel

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

Remarques.

- L'espérance est donc la moyenne des valeurs prises par X, chacune étant pondérée par sa probabilité.
- L'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi : deux variables aléatoires réelles de même loi ont même espérance.

Exemple. Soit S la variable aléatoire égale à la somme des chiffres apparus lors du lancer de deux dés (on a déjà déterminé la loi de S). Alors :

$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{36}\times 2+\frac{2}{36}\times 3+\frac{3}{36}\times 4+\frac{4}{36}\times 5+\frac{5}{36}\times 6+\frac{6}{36}\times 7+\frac{5}{36}\times 8+\frac{4}{36}\times 9+\frac{3}{36}\times 10+\frac{2}{36}\times 11+\frac{1}{36}\times 12 = 7.$$

Propriété 14

Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, son espérance est donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)$$

Preuve. Soit $x \in X(\Omega)$. On sait Ω est l'union disjointe des ensembles $\{X = x\}$ avec $x \in X(\omega)$. De plus, on peut écrire : $\{X = x\} = \displaystyle\bigcup_{\omega \in \{X=x\}} \{w\}$. Les ensembles de cette union sont également deux à deux disjoints. Ainsi, $\mathbb{P}(\{X = x\}) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{\omega \in \{X=x\}} \{w\}\right) = \displaystyle\sum_{\omega \in \{X=x\}} \mathbb{P}(\{\omega\})$. De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega) &= \sum_{x \in X(\omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega) \\
&= \sum_{x \in X(\omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} \mathbb{P}(\{\omega\})x \\
&= \sum_{x \in X(\omega)} x \sum_{\omega \in \{X=x\}} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\omega)} x\mathbb{P}(\{X = x\})
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple. Soit A une partie de Ω et $X = 1_A$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(A).$$

Propriété 15

(1) Linéarité. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$.

(2) Croissance. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $X \leq Y$. Alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Preuve.

(1) On a

$$\mathbb{E}(\lambda X+\mu Y) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})(\lambda X+\mu Y)(\omega) = \lambda \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)+\mu \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})Y(\omega) = \lambda\mathbb{E}(X)+\mu\mathbb{E}(Y).$$

(2) Comme pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$, et comme $\mathbb{P}(\{\omega\}) \geq 0$, $\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega) \leq \mathbb{P}(\{\omega\})Y(\omega)$ et en sommant $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

□

Vocabulaire. On dit que la variable aléatoire X est centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$.
Si X est une variable aléatoire, alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

Propriété 16 (Théorème du transfert)

Soit X une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\omega)} \mathbb{P}(X = x)f(x).$$

Preuve. On a déjà vu que $\Omega = \bigcup_{x\in X(\omega)} \bigcup_{\omega\in\{X=x\}} \{\omega\}$ et que ces unions sont disjointes. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X)) &= \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})f(X(\omega)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\omega\in\{X=x\}} \mathbb{P}(\{\omega\})f(X(\omega)) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\omega\in\{X=x\}} \mathbb{P}(\{\omega\})f(x) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x) \sum_{\omega\in\{X=x\}} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)f(x).
\end{aligned}$$

□

Propriété 17

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) &= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)x\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y)y\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)xy \\
&= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])xy = \mathbb{E}(XY)
\end{aligned}$$

par le théorème du transfert (appliqué à $f : (x, y) \mapsto xy$) et à la variable $Z = (X, Y)$. $\square$

ATTENTION. La réciproque est fausse en général, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Soient U et V deux urnes, que l'on remplit, de manière aléatoire avec deux boules. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules dans U, Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'urnes vides. Alors $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$. On calcule $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{2} = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Cependant $\mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(X = 0)P(Y = 0)$.

Propriété 18

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables mutuellement indépendantes, $\mathbb{E}(X_1 \dots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \dots \mathbb{E}(X_n)$.

Preuve. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ correspondant à l'énoncé. $\mathcal{P}(1)$ est trivialement vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et soient $X_1, \dots, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes. Alors X_{n+1} est indépendante de $X_1 \dots X_n$, donc par hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{E}(X_1 \dots X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_1 \dots X_n)\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_1) \dots \mathbb{E}(X_{n+1})$$

et on a $\mathcal{P}(n + 1)$.
En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$. $\square$

Propriété 19 (Inégalité de Markov)

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire positive. Alors $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

Preuve. On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)x \geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} \mathbb{P}(X = x)x \geq \sum_{x \geq a} \mathbb{P}(X = x)a = a\mathbb{P}(X \geq a)$$

donc en divisant par $a > 0$, on a le résultat. $\square$

4.2 Espérance usuelles

Propriété 20

Soient $a \in E$ et X une variable certaine égale à a. Alors

$$\mathbb{E}(X) = a$$

Propriété 21

Si X suit la loi uniforme sur $[|1, n|]$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n + 1}{2}$$

Preuve. On a $\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{n+1}{2}$. □

Propriété 22

Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p\in[0,1]$, alors :

$$\mathbb{E}(X)=p$$

Preuve. On a $\mathbb{E}(X)=\mathbb{P}(X=0)\times 0+\mathbb{P}(X=1)\times 1=p$ □

Propriété 23

Si X suit la loi binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in[0,1]$, on a :

$$\mathbb{E}(X)=np$$

Preuve. Notons tout d'abord que pour $k\in[|1,n|]$,

$$k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}=n\times\frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!}=n\binom{n-1}{k-1}$$

donc

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}=np$$

par le binôme de Newton. □

Remarque. L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut se retrouver en remarquant que :
si X_1, ..., X_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X=X_1+...+X_n$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X_1+...+X_n)=\mathbb{E}(X_1)+...+\mathbb{E}(X_n)=p+...+p=np$$

par linéarité de l'espérance.

5 Variance

5.1 Définition et propriétés

Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle variance de X et on note $\mathbb{V}(X)$ le réel défini par

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2).$$

On appelle écart-type de X le réel $\sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Remarques.

- L'écart type est bien défini car $(X-\mathbb{E}(X))^2\geq 0$ donc par croissance de l'espérance, on a $\mathbb{V}(X)\geq 0$.

- La variance est l'espérance du carré de la distance entre les valeurs de X et l'espérance de X. La variance ou l'écart type sont donc des mesures de la dispersion de X par rapport à $\mathbb{E}(X)$. Plus ces quantités sont petites, plus les valeurs de X sont "concentrées" autour de l'espérance.

Propriété 24

Soit X une variable aléatoire réelle. On a :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x)$$

Preuve. Résulte du théorème de transfert. □

Exemple. Notons S la variable aléatoire égale à la somme des chiffres apparus lors du lancer de deux dés. On a :

$$\mathbb{V}(S) = \frac{1}{36}\times 25 + \frac{2}{36}\times 16 + \frac{3}{36}\times 9 + \frac{4}{36}\times 4 + \frac{5}{36}\times 1 + \frac{6}{36}\times 0 + \frac{5}{36}\times 1 + \frac{4}{36}\times 4 + \frac{3}{36}\times 9 + \frac{2}{36}\times 16 + \frac{1}{36}\times 25 = \frac{35}{6}.$$

Propriété 25

Soit X une variable aléatoire réelle. On a :

(1) $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ (formule de Kœnig Huygens).

(2) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$.

Preuve.

(1) Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2.$$

(2) On a $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ par linéarité de l'espérance, ainsi

$$\mathbb{V}(aX + b) = \mathbb{E}((aX + b - a\mathbb{E}(X) - b)^2) = \mathbb{E}(a^2(X - \mathbb{E}(X))^2) = a^2 \mathbb{V}(X).$$

□

Propriété 26 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire et $\epsilon > 0$. Alors

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}.$$

Preuve. On a $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \epsilon^2)$, le résultat vient ensuite directement de l'inégalité de Markov. □

Remarque. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev vise à montrer que la variable aléatoire X prend des valeurs proches de $\mathbb{E}(X)$ avec une grande probabilité, mais elle donne, en générale une majoration assez grossière.

Propriété 27

Soient X et Y des variables aléatoires réelles.

(1) On a :
$$\mathbb{V}(X+Y) = V(X) + V(Y) + COV(X,Y),$$
où $COV(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ est la covariance de X et Y.

(2) Si X et Y sont **indépendantes**, alors :
$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Preuve. On a :
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2) - \mathbb{E}(X+Y)^2 = \mathbb{E}(X^2+2XY+Y^2) - (\mathbb{E}(X)^2 + 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2)\\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)\end{aligned}$$

Ainsi on a bien $\mathbb{V}(X+Y) = V(X) + V(Y) + COV(X,Y)$. De plus si X et Y sont indépendantes, alors $COV(X,Y) = 0$ et $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$. □

Remarque. Si X et Y sont indépendantes, alors $COV(X,Y) = 0$. **Attention**, la réciproque est fausse en général : il suffit de reprendre l'un des exemples précédent pour s'en assurer.

Propriété 28

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables mutuellement indépendantes, alors :
$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n).$$

Preuve. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n)$. Ainsi
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) &= \mathbb{E}((X_1 + \dots + X_n)^2) - (\mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n))^2\\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2\sum_{i<j} X_iX_j\right) - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)^2 - 2\sum_{i<j}\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)\\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2) - 2\sum_{i<j}(\mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j))\\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)\end{aligned}$$
puisque les variables sont deux à deux indépendantes. □

5.2 Variances usuelles

Propriété 29

Soient $a \in E$ et X une variable certaine égale à a. Alors
$$\mathbb{V}(X) = 0$$

Propriété 30

Si X suit la loi uniforme sur $[|1,n|]$, on a :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Preuve. On sait déjà que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$. Ainsi,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n+1}{12}(4n+2-3n-3) = \frac{n^2-1}{12}.$$

$\square$

Propriété 31

Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, alors :

$$\mathbb{V}(X) = p(1-p)$$

Preuve. On sait déjà que $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{E}(X^2) = 1^2\mathbb{P}(X=1) + 0^2\mathbb{P}(X=0) = p$ par le théorème de transfert. Ainsi $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$. $\square$

Propriété 32

Si X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, on a :

$$\mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

Preuve. On sait déjà que $\mathbb{E}(X) = np$. Notons que pour $k \in [|2,n|]$,

$$k(k-1)\binom{n}{k} = k(k-1)\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} = n(n-1)\times\frac{(n-2)!}{((n-2)-(k-2))!(k-2)!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

donc par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^{k-2}(1-p)^{n-2-(k-2)} = n(n-1)p^2(1-p+p)^{n-2} = n(n-1)p^2.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)+X) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - n$$

$\square$