Chapitre 3

Calculs algébriques

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
mansuy.mathieu@hotmail.fr

1 Sommes et produits

1.1 Définitions et propriétés

Définition.

Soit I un sous ensemble fini non vide d'entiers et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On note :

- $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$;
- $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Par convention, lorsque $I=\emptyset$, $\sum_{i\in I} a_i = 0$ et $\prod_{i\in I} a_i = 1$.

Notations. Dans le cas où $I = [|m,n|] = \{m, m+1, \dots, n-1, n\}$ avec $m \leq n$, on utilisera la notation plus commode :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \quad ; \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n \qquad (m-n+1 \text{ termes}).$$

Remarque. L'indice i est un indice "muet" : on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs. Ainsi :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m}^{n} a_j = \prod_{k=m}^{n} a_k.$$

Propriété 1 (Règles de calculs pour les sommes)

Soient I un sous ensemble fini non vide d'entiers et $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres réels ou complexes.

- $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$.
- Pour tout nombre λ réel ou complexe, $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i$.

Propriété 2 (Règles de calculs pour les produits)

Soient I un sous ensemble fini non vide d'entiers et $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres réels ou complexes.

- $\displaystyle\prod_{i\in I}(a_i b_i) = \prod_{i\in I} a_i \times \prod_{i\in I} b_i$.
- Pour tout nombre λ réel ou complexe, $\displaystyle\prod_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda^p \prod_{i\in I} a_i$, où p est le nombre d'éléments de I.

1.2 Méthodes de calculs de sommes et de produits

► *Sommes et produits téléscopiques :* Lorsque l'expression à sommer est de la forme $u_{k+1} - u_k$, les termes s'éliminent alors deux à deux et il ne reste alors que le premier et le dernier terme :

$$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m.$$

Ce principe s'applique également aux produits de la forme $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k}$:

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m}.$$

Exemples. Calculer la somme et le produit suivant :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad ; \quad P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

► *Changement d'indice :* Pour effectuer un changement d'indice, on définit le nouvel indice en fonction de l'indice de départ. Puis on exprime la somme avec ce nouvel indice en veillant à changer les bornes de la somme et le terme sous la somme en fonction du nouvel indice.

Exemples. À l'aide du changement d'indice $j = n - k$, retrouver la valeur de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

► *Regroupement de termes :* On décompose la somme de départ en plusieurs sommes plus simples à calculer.

Exemples. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$, où $\min(k, n)$ est le minimum des entiers k et n.

1.3 Sommes de référence

Théorème 3 (Somme d'une progression arithmétique de nombres réels ou complexes)

Si (u_k) est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{u_m + u_n}{2} \times (n - m + 1).$$

Preuve. On note r la raison. On peut alors écrire $S = \displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k$ des deux manières suivantes :

$$\begin{aligned} S &= u_m && + (u_m + r) + \ldots + (u_m + (n-m)r) \\ S &= (u_m + (n-m)r) && + (u_m + (n-m-1)r) + \ldots + u_m \end{aligned}$$

En sommant les deux lignes, on obtient :

$$2S = (2u_m + (n-m)r) + (2u_m + r + (n-m-1)r) + \cdots + (2u_m + (n-m)r),$$

ce qui se réécrit sous la forme :

$$2S = (n - m + 1)(u_m + (u_m + (n-m)r)) = (n - m + 1)(u_m + u_n).$$

□

Théorème 4 (Somme d'une progression géométrique de nombres réels ou complexes)

Si (u_k) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \times \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}.$$

Dans le cas où $q = 1$ (suite constante), $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = (n - m + 1)u_m$.

Preuve. On multiplie $S = \sum_{k=m}^{n} u_k = u_m + u_m q + \dots u_m q^n$ par $(1-q)$:

$$\begin{aligned}(1-q)S &= u_m + u_m q + \dots u_m q^n - (u_m q + u_m q^2 + \dots u_m q^{n+1}) \\ &= u_m - u_m q^{n+1}.\end{aligned}$$

□

Théorème 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux nombres réels ou complexes. Alors :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Preuve. On développe $(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$:

$$\begin{aligned}(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= (a-b)(b^{n-1} + ab^{n-2} + \dots + a^{n-1}) \\ &= (ab^{n-1} + a^2 b^{n-2} + \dots + a^n) - (b^n + ab^{n-1} + \dots + a^{n-1} b) \\ &= a^n - b^n.\end{aligned}$$

□

1.4 Sommes doubles

Définition.

Soient I et J deux ensembles finis non vides d'entiers, et $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de nombres réels ou complexes. On note $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij}$ la somme des éléments de la famille $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$.

Notations. Lorsque $I = [|m,n|]$ et $J[|p,q|]$, la somme de la famille $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ se note $\sum_{\substack{m \le i \le n \\ p \le j \le q}} a_{ij}$. On la note encore $\sum_{m \le i,j \le n} a_{ij}$ lorsque $I = J = [|m,n|]$.

Théorème 6 (Somme double indexée par un rectangle)

Soient m, n, p, q des entiers et $(a_{ij})_{i,j}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par le rectangle $[|m,n|] \times [|p,q|]$. Alors :

$$\sum_{\substack{m \le i \le n \\ p \le j \le q}} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} a_{ij} = \sum_{j=p}^{q} \sum_{i=m}^{n} a_{ij}.$$

Preuve. On dispose les $a_{i,j}$ dans un tableau à double entrée.

	$j=p$	$j=p+1$	$\cdots$	$j=q$	
$i=m$	$a_{m,p}$	$a_{m,p+1}$	$\cdots$	$a_{m,q}$	$\sum_{j=p}^{q} a_{m,j}$
$i=m+1$	$a_{m+1,p}$	$a_{m+1,p+1}$	$\cdots$	$a_{m+1,q}$	$\sum_{j=p}^{q} a_{m+1,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$i=n$	$a_{n,p}$	$a_{n,p+1}$	$\cdots$	$a_{n,q}$	$\sum_{j=p}^{q} a_{n,j}$
	$\sum_{i=m}^{n} a_{i,p}$	$\sum_{i=m}^{n} a_{i,p+1}$	$\cdots$	$\sum_{i=m}^{n} a_{i,q}$	S

Il s'agit dans les deux cas de calculer la somme de tous les éléments du tableau :

- en sommant d'abord chaque ligne $\displaystyle\sum_{j=p}^{q} a_{i,j}$, puis en sommant toutes les lignes $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{i,j}$;
- en sommant d'abord sur chaque ligne $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_{i,j}$, puis en sommant toutes les colonnes $\displaystyle\sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{i,j}$.

$\square$

Théorème 7 (Somme double indexée par un triangle)

Soient m et n deux entiers et $(a_{ij})_{i,j}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par le triangle $\{(i,j); m \leq i \leq j \leq n\}$. Alors :

$$\sum_{m\leq i\leq j\leq n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{ij}.$$

Preuve. De même, on dispose les $a_{i,j}$ dans un tableau à double entrée. Mais cette fois le tableau est triangulaire : seuls sont pris en compte les éléments $a_{i,j}$ où $i \leq j$

	$j=m$	$j=m+1$	$\cdots$	$j=n$	
$i=m$	$a_{m,m}$	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	$\sum_{j=m}^{n} a_{m,j}$
$i=m+1$		$a_{m+1,m+1}$	$\cdots$	$a_{m+1,n}$	$\sum_{j=m+1}^{n} a_{m+1,j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$i=n$				$a_{n,n}$	$\sum_{j=m}^{n} a_{n,j}$
	$\sum_{i=m}^{m} a_{i,m}$	$\sum_{i=m}^{m+1} a_{i,m+1}$	$\cdots$	$\sum_{i=m}^{n} a_{i,n}$	S

$\square$

Exemple. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

Remarque. Les résultats précédents s'étendent de façon immédiate si on remplace somme double par produit double.

Propriété 8 (Produit de deux sommes)

Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_j)_{1\leq j\leq p}$ deux familles de nombres complexes. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{p} b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i b_j = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j.$$

Preuve.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{p} b_j = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_i b_j\right).$$

On est ramené à une somme double comme dans la proposition précédente. □

2 Coefficients binomiaux et formule du binôme

2.1 Coefficients binomiaux

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **factorielle** n et on note $n!$ l'entier défini par $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Remarque. On a $0! = 1$ et si $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1)!$.

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. On pose :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in [|0,n|] \\ 0 & \text{si } p > n \text{ ou } p < 0 \end{cases}$$

$\binom{n}{p}$ est le **coefficient binomial** et se lit “p parmi n”.

Propriété 9 (Relations sur les coefficients binomiaux)

Soit n un entier naturel non nul.

(1) Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (symétrie des coefficients binomiaux).

(2) Pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, $p.\binom{n}{p} = n.\binom{n-1}{p-1}$.

(3) Pour tout $p \in [\![1,n-1]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (formule du triangle de Pascal).

Remarque. Cette dernière relation nous permet de construire le **triangle de Pascal**, qui nous donne une construction rapide des premiers coefficients binomiaux:

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$\dots$		
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						
n	1	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\dots$	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	$\dots$ 1	
$n+1$	1	$\binom{n+1}{1}$	$\binom{n+1}{2}$			$\binom{n+1}{p+1}$	$\dots$	1

Remarque. Grâce à la formule du triangle de Pascal, on obtient que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$, $\binom{n}{p}$ est un entier naturel. En effet, raisonnons par récurrence sur n :

- Initialisation : Pour $n = 0, p = 0$, $\binom{0}{0} = 1 \in \mathbb{N}$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in [|0,n|]$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$. Soit $p \in [|0,n+1|]$. Si $p = n+1$, $\binom{n}{p} = 1 \in \mathbb{N}$. Si $p \leq n$, on a :
$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \in \mathbb{N} \text{ par hypothèse de récurrence.}$$
On conclut par principe de récurrence que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$, $\binom{n}{p}$ est un entier naturel.

2.2 Formule du binôme de Newton

Théorème 10 (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel.
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Preuve. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. □

Exemples.

- Pour $a = b = 1$, on obtient $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
- Pour $a = 1$ et $b = -1$, on obtient $0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.