Chapitre 5

Primitives

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Calculs de primitives

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définition des primitives d'une fonction continue

Définition.

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si f est dérivable de dérivée f' continue.
- Plus généralement si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I, on dira que f est de classe $\mathcal{C}^n$.
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition.

Soient I un intervalle et $f : I \mapsto \mathbb{K}$ une fonction continue. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et dont la dérivée est f.

Exemple.

- Une primitive de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, ln si $\alpha = -1$.
- Une primitive de $x \mapsto e^{\omega x}$ est $x \mapsto \frac{1}{\omega}e^{\omega x}$ pour $\omega \in \mathbb{C}^*$.

Propriété 1 (Lien entre deux primitives d'une même fonction)

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle différent d'une constante.

Preuve. Si F_1 et F_2 sont deux primitives de la fonction F sur I, alors $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$ donc la fonction $F_1 - F_2$ est constante sur I. $\square$

1.2 Existence des primitives d'une fonction continue

Rappel. Intégrale d'une fonction continue de la variable réelle à valeurs complexes.
Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue, on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par le nombre complexe suivant :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re(f(t))dt + i\int_a^b Im(f(t))dt.$$

Propriété 2 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, et $a \in I$.

(1) La fonction f admet des primitives sur I.

(2) La fonction $F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

(3) Pour toute primitive G de f sur I, on a : $\forall x \in I,\ G(x) = G(a) + \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

On admet ce théorème pour le moment, il sera démontré plus tard dans l'année.

Notations.

- Le symbpole $\int f(x)\mathrm{dx}$ (introduit par Leibniz) désigne une primitive *quelconque* de f. Elle est donc définie à une constante additive près.
- La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{dt}$ est la primitive de f s'annulant en a.

Remarque.

- La fonction ln a été définie comme l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. En d'autres termes, $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue. Si F_1 est une primitive de $Re(f)$ sur $[a,b]$ et F_2 une primitive de $Im(f)$ sur $[a,b]$, une primitive de f sur $[a,b]$ est $F{=}F_1 + iF_2$. Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 1 + ix$ est $x \mapsto x + i\frac{x^2}{2}$.

► *Pour déterminer une primitive faisant intervenir $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$; il sera souvent plus simple de passer par l'intégrale de $x \mapsto \mathrm{e}^{(a+ib)x}$, dont on connaît une primitive, et d'en prendre sa partie réelle ou imaginaire.*

Exemple. Calculons une primitive $F : x \mapsto \displaystyle\int e^{2t}\cos t dt$ de $x \mapsto e^{2x}\cos x$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= Re\left(\int e^{2t}e^{it}dt\right) = Re\left(\int e^{(2+i)t}dt\right) = Re\left(\frac{1}{2+i}e^{(2+i)x}\right) + C \\
&= Re\left(\frac{(2-i)}{5}e^{2x}(\cos x + i\sin x)\right) + C = \frac{e^{2x}}{5}Re\left(2\cos(x) + 2i\sin(x) - i\cos(x) + \sin(x)\right) + C \\
&= \frac{e^{2x}}{5}(2\cos x + \sin x) + C \quad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

► *Pour déterminer des primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \cos^p(x)\sin^q(x)$ avec $p, q \geq 0$, on pensera à linéariser l'expression, l'obtention de primitives se faisant ensuite aisément.*

Exemple. Calculer des primitives de $\int \cos^3(x)\mathrm{dx}$.

On linéarise $x \mapsto \cos^3(x)$: on obtient $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$, d'où :

$$\int \cos^3(x)\mathrm{dx} = \int \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)\mathrm{dx} = \frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x) + C.$$

Propriété 3

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Pour toute primitive $F : [a,b] \to \mathbb{K}$ de f, on a

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Preuve. Soit $h : x \mapsto F(x) - F(a)$. Alors h est dérivable sur I comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont, et pour $x \in I$, $h'(x) = F'(x) = f(x)$. De plus $h(a) = 0$, donc h est une primitive de f s'annulant en a. D'après l'unicité du théorème précédent, on a pour tout $x \in I$, $h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. En prenant la valeur en b, on a le résultat voulu. □

Remarque. On écrit généralement ceci sous la forme $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$. Le résultat précédent montre pourquoi le calcul d'une intégrale se ramène souvent au calcul d'une primitive.

Remarque. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

1.3 Primitives usuelles

cf. Formulaire.

2 Intégration par parties et changement de variables

2.1 Intégration par parties

Propriété 4 (Intégration par parties)

Soient f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{K}$.

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Preuve. On a

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)g'(t)dt = \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))dt = \int_a^b (fg)'(t)dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b$$

puisque fg est $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions qui le sont. □

Notation. En pratique, on procèdera à une intégration par partie en utilisant le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} + & g & & f' \\ & & \searrow & \\ - & g' & \xleftarrow{\int} & f \end{array}$$

Applications de la formule d'intégration par parties

On présente quatres exercices illustrant deux des applications de l'intégration par parties :

- intégrer des fonctions dont la dérivée est simple.
- obtenir des relations de récurrence entre des intégrales dépendant d'un entier naturel.

Exemple. Déterminer des primitives de $x \mapsto \ln(x)$ et de $x \mapsto \arctan(x)$.

- Pour la fonction ln, on a :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \ln(x) & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & \frac{1}{x} & \xleftarrow{\int} & x \end{array}$$

  Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$, l'intégration par parties est donc valide. Et on a $\int \ln(x)\mathrm{dx} = x\ln(x) - \int \mathrm{dx} = x\ln(x) - x + C$.

- Pour la fonction arctan, on a :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \arctan(x) & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & \frac{1}{1+x^2} & \xleftarrow{\int} & x \end{array}$$

  Les fonctions $x \mapsto \arctan(x)$ et $x \mapsto x$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc faire une intégration par parties. D'où $\int \arctan(x)\mathrm{dx} = x\arctan(x) - \int \dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{dx} = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

Exemple. Calculons $I = \displaystyle\int_0^\pi (t^2 - t + 1)\cos t dt$. On va faire ici trois intégrations par parties.

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & t^2-t+1 & & \cos(t) \\
 & & \searrow & \\
- & 2t-1 & & \sin(t) \\
 & & \searrow & \\
+ & 2 & & -\cos(t) \\
 & & \searrow & \\
- & 0 & \overset{\int}{\longleftarrow} & -\sin(t)
\end{array}$$

Ces trois intégrations par parties sont bien licites, puisque $t \mapsto t^2-t+1$ et sin sont de classe $\mathcal{C}^{\ni}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
I &= \Big[(t^2-t+1)\sin t - (2t-1)(-\cos(t)) + 2(-\sin(t))\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 0 \times (-\sin t)dt \\
&= (2\pi-1)\cos(\pi) - (-1)\cos(0) = 1-(2\pi-1) = 2-2\pi.
\end{aligned}$$

Exercice. On considère les intégrales de Wallis (1616 - 1703) :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{dx},\ \text{avec } n \in \mathbb{N}.$$

Former pour $n \geq 2$ une relation de récurrence entre W_n et W_{n-2}, et en déduire que la suite $n \mapsto nW_nW_{n-1}$ est constante.

Soit $n \geq 2$. On procède à une intégration par parties :

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & \cos^{n-1}(x) & & \cos(x) \\
 & & \searrow & \\
- & (n-1)\sin(x)\cos^{n-2}(x) & \overset{\int}{\longleftarrow} & \sin(x)
\end{array}$$

L'intégration par parties est bien licite puisque $x \mapsto \cos^{n-1}(x)$ et cos sont de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, et on a :

$$\begin{aligned}
W_n &= \left[\cos^{n-1}(x)\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^2(x)\cos^{n-2}(x)dx \\
&= (n-1)(W_{n-2}-W_n).
\end{aligned}$$

Finalement on a $nW_n = (n-1)W_{n-2}$, et en multipliant par W_{n-1} :

$$nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2} = \cdots = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

2.2 Changement de variables

Propriété 5 (Changement de variable)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I. Soient $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{dx} = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{dt}.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variables $x = \varphi(t)$.

Preuve. Si F est une primitive de f, alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $f \circ \varphi \times \varphi'$ et on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

$$\int_a^b f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{dt} = [F \circ \varphi(t)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

□

▶ *Dans la pratique, on veillera en effectuant un changement de variables à modifier les trois éléments :*

- *la variable* $x = \phi(t)$,
- *l'élément différentiel* $dx = \phi'(t)dt$,
- *les bornes de l'intégrale : si* t *varie entre* a *et* b, $x = \phi(t)$ *doit varier entre* $\phi(a)$ *et* $\phi(b)$.

Exemple. Soit $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$. On pose $t = \cos u$ (la fonction cos étant $\mathcal{C}^1$) qui donne $dt = -\sin u du$ pour avoir

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2 u}(-\sin u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2u)}{2}du = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

On utilise ici que $\sqrt{\sin^2 u} = \sin x$, sin étant positif sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exemple. Soit $I = \int_0^1 \frac{e^{2t}dt}{1+e^t}$. Posons le changement de variable $u = e^t$ (la fonction $t \mapsto e^t$ étant $\mathcal{C}^1$), qui donne $du = e^t dt$ ou $dt = \frac{du}{u}$, il vient

$$I = \int_1^e \frac{u^2}{u(1+u)}du = \int_1^e \frac{u}{1+u}du = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{1+u}\right)du = e - 1 - (\ln(1+e) - \ln(2)) = \ln(2) + e - 1 - \ln(1+e).$$

▶ *Comme dans l'exemple précédent, pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle en* e^t, *on posera toujours le changement de variable* $u = e^t$.

Remarque. Formule de changement de variables pour les primitives.
Si $\varphi : J \to I$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue, alors on a :

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C \text{ avec } C \in \mathbb{K}.$$

Exemple. Primitives de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^2+b^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$).

- On effectue le changement de variables $x - a = bt$, d'où $\mathrm{d}x = b\mathrm{d}t$ et :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{b}\arctan(t) + C = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C.$$

- On effectue le changement de variables $x = bt$, d'où $\mathrm{d}x = b\mathrm{d}t$ et :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t) + C = \arcsin\left(\frac{x}{b}\right) + C.$$

3 Primitives de fractions rationnelles

On présente des techniques pour déterminer à l'aide de fonctions usuelles les primitives de fonctions rationnelles $x \mapsto F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q désignent des fonctions polynomiales à coefficients réels.

3.1 Décomposition en éléments simples

Propriété 6 (Décomposition en éléments simples)

Supposons que Q soit de la forme $Q(x) = (x-a_1)^{m_1}\dots(x-a_n)^{m_n}$ avec $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$, et P une fonction polynomiale de degré $< n$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{m_1}^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(n)}, \cdots, \lambda_{m_n}^{(n)} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{a_1, \dots, a_n\}$,

$$F(x) = \frac{\lambda_1^{(1)}}{x-a_1} + \frac{\lambda_2^{(1)}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{m_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{m_1}} + \dots + \frac{\lambda_1^{(n)}}{x-a_n} + \dots + \frac{\lambda_{m_n}^{(n)}}{(x-a_n)^{m_n}}. \qquad (E)$$

► *Pour déterminer une primitive de* $F = \dfrac{P}{Q}$ *lorsque* Q *est de la forme* $Q(x) = (x-a_1)^{m_1}\dots(x-a_n)^{m_n}$ *avec les* a_i *des réels deux à deux distincts, et* P *de degré* $< n$*, on procèdera comme suit :*

- *on décompose en éléments simples la fraction rationnelle* $\dfrac{P}{Q}$ *;*
- *on met tout au même dénominateur et on calcule les scalaires* λ_i *par identification ;*
- *on est alors ramené à déterminer des primitives de chacun des termes* $\frac{\lambda_i^{(j)}}{(x-a_j)^i}$*, ce qu'on sait faire.*

Remarque. On verra qu'on peut toujours se ramener au cas où $deg(P) < deg(Q)$, quitte à faire la division euclidienne de la fonction polynomiale P par Q.

Exemple. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$, et en déduire une primitive de f.

La décomposition en éléments simples de f est de la forme

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (et $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$). Après identification, on trouve $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$. Ainsi $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$ puis une primitive de f sur un intervalle sur lequel elle est définie est $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln(|x-1|) - \ln(|x-1|)) + C$.

Exemple. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x(x+1)^2}$, et en déduire une primitive de f.

La décomposition en éléments simples de f est de la forme

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x}$$

avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ (et $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$). Après identification on trouve $a = -1$, $b = 1$ et $c = 1$. Ainsi $f(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x}$ puis une primitive de f sur un intervalle sur lequel elle est définie est

$$x \mapsto -\ln(|x+1|) - \frac{1}{x+1} + \ln(|x|).$$

Exemple. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)(t+2)}$.

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{t(t+1)(t+2)}$ est de la forme

$$\frac{1}{t(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t+2},$$

avec $a,b,c \in \mathbb{R}$. On obtient $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = \frac{1}{2}$. On obtient alors :

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)(t+2)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right).$$

Exemple. Calculer une primitive de $F(x) = \dfrac{2x+1}{x^3-1}$.

On a $P(x) = 2x+1$, $Q(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. En particulier $deg(P) < deg(Q)$. Cependant, Q n'est pas de la forme proposée précédemment, il n'est pas scindé et possède des racines complexes. On procèdera alors de la manière suivante.

► *Lorsque le polynôme* Q *au dénominateur possède un facteur dans sa décomposition du type* $(x^2+bx+c)^m$ *avec* $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $b,c \in \mathbb{R}$ *tels que* $b^2 - 4c < 0$*, on ajoutera dans la décomposition en éléments simples* (E) *de* Q *la composante suivante qui correspond à ce facteur :*

$$\frac{\lambda_1 x + \mu_1}{x^2+bx+c} + \frac{\lambda_2 x + \mu_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{\lambda_m x + \mu_m}{(x^2+bx+c)^m},$$

où les λ_i, μ_i sont des réels à déterminer par identification.

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{2x+1}{x^3-1}$ est donc de la forme

$$\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On obtient $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$. On obtient alors :

$$\int \frac{2x+1}{x^3-1}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{x-1}\mathrm{dx} - \int \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{dx} = \ln(|x-1|) - \int \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{dx} + C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Reste alors à déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$. On explique cela dans la section suivante.

3.2 Cas particulier où $deg(Q) = 2$

On précise à présent le cas où le polynôme au dénominateur est de degré 2, ce qui est extrêmement courant en pratique. On est donc dans la situation suivante :

$$F(x) = \frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c}$$

avec a, b, c, λ et μ des réels. On cherche une primitive pour F. Quitte à factoriser par λ/a, on peut supposer que $a = 1$ et $\lambda = 1$. On note $\Delta = b^2 - 4c$ le discriminent de Q. On a alors plusieurs cas :

- Si $\Delta > 0$, Q a deux racines réelles distinctes α et β. Alors :

$$\int F(x)\mathrm{dx} = \int \frac{x+\mu}{(x-\alpha)(x-\beta)}\mathrm{dx}.$$

  On est alors ramené au cas précédent : on décompose en éléments simples cette fraction pour en déterminer une primitive.

- Si $\Delta = 0$, Q a une racine double $\alpha = -\frac{b}{2}$, et on a :

$$\int F(x)\mathrm{dx} = \int \frac{x+\mu}{(x-\alpha)^2}\mathrm{dx} = -\frac{1}{x-\alpha} + C.$$

- Si $\Delta < 0$, Q a deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. Alors $Q(x) = (x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta) = (x-\alpha)^2+\beta^2$ et on a :

$$\int F(x)\mathrm{dx} = \int \frac{x+\mu}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\mathrm{dx}.$$

  On fait alors apparaître la dérivée $\dfrac{u'}{u}$ d'un logarithme :

$$\begin{aligned}\int \frac{x+\mu}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\mathrm{dx} &= \int \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\mathrm{dx} + (\alpha+\mu)\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{2}\ln(x-\alpha)^2+\beta^2) + \frac{\alpha+\mu}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C.\end{aligned}$$

Exemple. Calculer une primitive de $F(x) = \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$

Le discriminant du polynôme $x^2 - 5x + 6$ est strictement positif. On a donc deux racines réelles distinctes qui sont 2 et 3. On cherche alors a et b tels que

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}.$$

On montre que $a = -3$ et $b = 4$. On en déduit :

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\mathrm{dx} = -3\int \frac{1}{x-2}\mathrm{dx} + 4\int \frac{1}{x-3} = -3\ln|x-2| + 4\ln|x-3| + C.$$

Exemple. Calculer une primitive de $F(x) = \dfrac{2x+1}{x^3-1}$.

On avait obtenu :

$$\int \frac{2x+1}{x^3-1}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{x-1}\mathrm{dx} - \int \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{dx} = \ln(|x-1|) - \int \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{dx} + C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Reste alors à déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}\mathrm{dx} &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{dx}\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\mathrm{dx} + C\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)\right) + C.\end{aligned}$$

Finalement, une primitive de $F(x) = \dfrac{2x+1}{x^3-1}$ est donnée par $x \mapsto \ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

Exemple. Calculer une primitive de $F(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

Tout d'abord, on se ramène au cas traité plus haut en écrivant :

$$F(x) = \frac{(x^2+x+1)-2x}{x^2+x+1} = 1 - \frac{2x}{x^2+x+1}.$$

Le discriminant du polynôme au dénominateur est strictement négatif. On fait apparaître la dérivée d'un logarithme puis on intègre :

$$\begin{aligned}\int F(x)\mathrm{dx} = x - \int \frac{(2x+1)-1}{x^2+x+1}\mathrm{dx} &= x - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{dx} + \int \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}\mathrm{dx}\\ &= x - \ln(x^2+x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$