Chapitre 6

Équations différentielles

1 Equations différentielles du premier ordre 2
1.1 Généralités 2
1.2 Résolution de l'équation homogène 2
1.3 Résolution de l'équation avec second membre . . . 4
1.4 Résolution avec conditions initiales 6
1.5 Problèmes de raccordement 7

2 Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants 9
2.1 Généralités 9
2.2 Résolution de l'équation homogène 9
2.3 Résolution de l'équation avec second membre . . . 11
2.4 Résolution avec conditions initiales 12
2.5 Application aux oscillateurs linéaires 13

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Equations différentielles du premier ordre

1.1 Généralités

Définition.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et $b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.

- On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** l'équation :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{E}$$

- On dit que f est solution sur I de (E) si f est dérivable sur I et si pour tout $t \in I$, $f'(t)+a(t)f(t) = b(t)$.

Remarques.

- Soit f une solution de (E) sur I, f est donc dérivable sur I. Elle est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur I puisque $f'(t) = b(t) - a(t)f(t)$ qui est par hypothèse continue sur I.
- Si on a une équation différentielle de la forme $\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$, on peut la ramener à la forme précédente (dite normalisée) en divisant par $\alpha(t)$. Il faut en revanche se placer sur un intervalle où la fonction α ne s'annule pas.

Exemples d'équations différentielles linéaires du premier ordre.

♦ La tension U aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R et un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$RCU' + U = E(t).$$

♦ L'intensité I dans un circuit RL constitué d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$LI' + RI = E(t).$$

♦ La proportion y de carbone 14 dans le carbone total des êtres vivants est constante. Après la mort, elle diminue de 1/8000 par an et vérifie donc l'équation différentielle suivante (où le temps est exprimé en années) :

$$y' + \frac{1}{8000}y = 0.$$

On peut ainsi dater la mort d'un être vivant grâce à cette relation (datation au carbone 14).

1.2 Résolution de l'équation homogène

Définition.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et $b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues. On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{E}$$

On appelle **équation différentielle homogène (ou sans second membre)** associée à (E), l'équation

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0. \tag{E_0}$$

Dans ce paragraphe, on étudie et on résout l'équation homogène (E_0) associée à l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E).

Propriété 1

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0) est stable par combinaison linéaire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall f, g \in \mathcal{S}_0, \quad \lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_0.$$

Preuve.

□

Propriété 2

Pour tout $a \in \mathbb{K}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' + ay = 0$ sont :

$$t \mapsto y(t) = \lambda e^{at} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Preuve. On multiplie l'équation $y' + ay = 0$ par e^{at} ($\neq 0$ sur $\mathbb{R}$) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{at}(y'(t) + ay(t)) == \frac{d}{dt}(e^{at}y(t)) = 0.$$

Ceci est équivalent à l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $e^{at}y(t) = \lambda$, ou $y(t) = \lambda e^{at}$. □

Propriété 3

Pour toute fonction continue $a : I \to \mathbb{K}$, les solutions de $y' + a(t)y = 0$ sont :

$$t \mapsto y(t) = \lambda e^{-A(t)}$$

où A est une primitive quelconque de la fonction a sur I, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a donc :

$$\mathcal{S}_0 = \{t \in I \mapsto \lambda e^{-\int a(t)\mathrm{dt}}; \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Preuve. L'idée de la démonstration est la même que précédemment : on multiplie l'équation $y' + a(t)y = 0$ par $e^{A(t)}$ ($\neq 0$ sur $\mathbb{R}$) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{A(t)}(y'(t) + a(t)y(t)) == \frac{d}{dt}(e^{A(t)}y(t)) = 0.$$

Ceci est équivalent à l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $e^{A(t)}y(t) = \lambda$, ou $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$. □

Remarques.

- Il n'y a qu'une solution qui s'annule : la fonction nulle.
- Toutes les solutions de (E_0) sont donc colinéaires, proportionnelles à $t \mapsto e^{-\int a(t)\mathrm{dt}}$. On dit alors que l'ensemble des solutions est une droite vectorielle, ou d'une autre manière que $\mathcal{S}_0$ est de dimension un.

Exemple. Résolvons $(\sin t)y' - (\cos t)y = 0$ sur $I =]0, \pi[$.

Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre un, homogène (ou sans second membre), non normalisée. Comme sin ne s'annule pas sur I, on peut la normalisée : cette équation équivaut donc à

$$y' - \frac{\cos t}{\sin t} y = 0.$$

Une primitive de $t \mapsto -\frac{\cos t}{\sin t}$ est donnée par $t \mapsto -\ln(|sin(t)|)$ sur I. On en déduit que les solutions de l'équation sont de la forme :

$$t \mapsto \lambda e^{\ln(\sin(t))} = \lambda \sin t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple. Résoudre $2ty' - y = 0$.

Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre un, homogène (ou sans second membre), non normalisée. On la résout sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$. Plaçons nous sur l'un de ces intervalles. On peut alors la normalisée :

$$y' - \frac{1}{2t}y = 0.$$

Une primitive de $t \mapsto -\frac{1}{2t}$ est donnée par $t \mapsto -\frac{1}{2}\ln(|t|)$. On en déduit que les solutions de l'équation sont de la forme :

$$t \mapsto \lambda e^{\frac{1}{2}\ln(|t|)}.$$

Ainsi sur $\mathbb{R}_+^*$ les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda_1\sqrt{t}$. Sur $\mathbb{R}_-^*$ les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda_2\sqrt{-t}$.

1.3 Résolution de l'équation avec second membre

Propriété 4 (Forme générale des solutions)

Soit $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre avec $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues.
Alors toute solution de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_P de (E) une solution de l'équation homogène associée (E_0).
Ainsi l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) satisfait :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0.$$

Preuve. Puisque y_p est une solution particulière de (E), on a pour tout $t \in I$:

$$y_p'(t) + a(t)y_p(t) = b(t).$$

- Soit z une solution de (E_0). Alors pour tout $t \in I$, on a :

  $$z'(t) + a(t)z(t) = 0.$$

  On obient alors :

  $$(y_p + z)'(t) + a(t)(y_p + z)(t) = 0 + b(t) = b(t).$$

  Donc $y = y_p + z$ est bien solution de (E), et on a l'inclusion $y_p + \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$

- Réciproquement, soit y une solution de (E). On a pour tout $t \in I$:

  $$y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

  Alors par différence, on obtient pour tout $t \in I$:

  $$(y'(t) - y_p'(t)) + a(t)(y(t) - y_p(t)) = 0.$$

  Donc $z = y - y_p$ est solution de (E_0), et $y = y_p + z$ appartient à $y_p + \mathcal{S}_0$. On a ainsi montré l'inclusion $\mathcal{S} \subset y_p + \mathcal{S}_0$.

□

Remarque.

- Pour obtenir l'ensemble des solutions de (E), il faudra donc déterminer une solution particulière de (E), et lui ajouter l'ensemble des solutions de (E_0) (dont on a vu la forme).
- L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc la somme d'un point y_p et de l'ensemble des des fonctions proportionnelles à $t \mapsto e^{-\int a(u)du}$. On dit alors que $\mathcal{S}$ est une droite affine.

Exemple. Résoudre l'équation $(E) : (1 + x^2)y' + y = 1$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus non constants, avec second membre.

On montre que l'équation homogène associée a pour solution générale $x \mapsto \lambda e^{-\arctan x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction constante égale à 1 est solution particulière évidente, donc la solution générale de (E) est $x \mapsto 1 + \lambda e^{-\arctan x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On donne maintenant des méthodes générales pour obtenir une solution particulière d'une équation différentielle linéaire.

Propriété 5 (Principe de superposition)

Soient $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
Si f_1 est solution sur I de $y' + a(t)y = b_1(t)$, f_2 est solution sur I de $y' + a(t)y = b_2(t)$, alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f_1 + \mu f_2$ est solution sur I de :

$$y' + a(t)y = \lambda b_1 + \mu b_2.$$

Preuve. Cela résulte des égalités :

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)' + a(t)(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda(f_1' + a(t)f_1) + \mu(f_2' + a(t)f_2) = \lambda b_1 + \mu b_2.$$

□

► *Cette proposition peut être utile dans la pratique : pour résoudre une équation différentielle linéaire, on peut éventuellement scinder le second membre afin de se ramener à plusieurs équations différentielles dont les second membres seront plus simples à traiter.*

Propriété 6 (Solution particulière avec second membre exponentielle-polynôme)

On considère un nombre $a \in \mathbb{K}$, une fonction polynomiale P à coefficients dans $\mathbb{K}$ et l'équation différentielle linéaire :

$$y' + ay = e^{\lambda t} P(t) \tag{E}$$

Alors l'équation (E) a au moins une solution particulière de la forme $t \to e^{\lambda t} t^m Q(t)$ où Q est une fonction polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $\deg(Q) = \deg(P)$ et :

- $m = 0$ si $\lambda + a \neq 0$.
- $m = 1$ si $\lambda + a = 0$.

Exemple. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 4\text{ch}(t)$.

Propriété 7 (Méthode de variation de la constante)

Soit $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Les solutions de l'équation homogène sont du type $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ où λ est une constante.
- Les solutions de l'équation complète sont du type $t \mapsto \lambda(t) e^{-A(t)}$ où λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

► *On utilisera donc la méthode suivante, due à Lagrange, pour résoudre pratiquement l'équation différentielle* $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ *:*

- *On résout l'équation homogène* $y' + a(t)y = 0$ *: les solutions sont* $t \mapsto \lambda \exp(-A(t))$ *où* $\lambda \in \mathbb{K}$ *est une constante quelconque et* A *une primitive de* a*.*
- *On résout l'équation complète* $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ *en cherchant une solution particulière sous la forme* $t \mapsto \lambda(t) \exp(-A(t))$*, où* λ *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I*.*

Exemple. Déterminer les solutions de $(t+1)y' - ty + 1 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

1.4 Résolution avec conditions initiales

Définition.

Étant données deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, on considère l'équation différentielle (E) : $\quad y' + a(t)y = b(t)$.
Le **problème de Cauchy** associé au couple (t_0, y_0) où $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$ est la recherche des solutions y de (E) vérifiant la condition initiale (ou condition de Cauchy) $y(t_0) = y_0$.

Propriété 8

On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, on considère l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = b(t). \tag{E}$$

Pour $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy associé à la condition initiale $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution sur I.

Preuve. Soit A une primitive de la fonction continue a, qui vérifie donc $A' = a$.
Puisque $e^{A(t)}$ ne s'annule pas sur I, on a une équation équivalente en multipliant $y' + a(t)y = b(t)$ par $e^{A(t)}$:

$$\forall t \in I, \quad e^{A(t)}(y' + a(t)y) = \frac{d}{dt}(e^{A(t)}y(t)) = e^{A(t)}b(t).$$

Compte tenu de la condition $y(t_0) = y_0$, ceci équivaut par intégration de t_0 à t à :

$$e^{A(t)}y(t) - e^{A(t_0)}y_0 = \int_{t_0}^{t} e^{A(u)} f(u)du.$$

Soit encore si A désigne plus particulièrement la primitive de a s'annulant en t_0 :

$$y(t) = e^{-A(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(u)} f(u)du \right).$$

□

Remarque. On a montré en particulier dans la preuve de ce résultat que toute solution de (E) est bien de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$, ce qui justifie la méthode de variation de la constante.

Exemple. Résoudre $y' - \frac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$, avec pour condition initiale $y(1) = 1$.

Il s'agit d'une équation linéaire du première ordre à coefficient continus sur I.

La solution générale de son équation homogène associée est donc $x \mapsto \lambda \exp\left(\frac{1}{2}\ln x\right) = \lambda\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto \lambda(x)\sqrt{x}$, avec λ dérivable sur I. En reportant dans l'équation, il vient $\lambda'(x)\sqrt{x} = \sqrt{x}$ donc $\lambda'(x) = 1$ puis on peut prendre $\lambda : x \mapsto x$ et une solution particulière de (E) est $x \mapsto x\sqrt{x}$. La solution générale de (E) est donc $x \mapsto (\lambda + x)\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour trouver l'unique solution du problème considéré, il faut résoudre l'équation $(\lambda + 1) = 1$ i.e. $\lambda = 0$. Ainsi la solution du problème de Cauchy considéré est $x \mapsto x\sqrt{x}$.

Propriété 9

On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = b(t). \tag{E}$$

(1) Une seule courbe intégrale définie sur I passe par tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.

(2) Deux telles courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $I \times \mathbb{R}$.

Preuve. Le premier point est une reformulation du résultat précédent. Montrons le deuxième point : supposons que deux courbes intégrales se coupent en $M_0(t_0, y_0)$. Notons y_1 et y_2 les solutions de (E) sur I correspondantes. Elles sont donc toutes deux solutions du même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (E) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Par unicité, on a donc $y_1 = y_2$. □

Remarque. La seule solution de (E_0) : $y' + a(t)y = 0$ telle que $y(t_0) = 0$ est la fonction nulle. En effet, la fonction nulle est solution de (E_0). Et par la proposition précédente, c'est l'unique solution telle que $y(t_0) = 0$. En particulier, la seule solution de (E_0) qui s'annule est la fonction nulle.

1.5 Problèmes de raccordement

On revient sur le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre non normalisées :

$$a(t)y' + b(t)y = c(t) \tag{E}$$

où a, b, c sont continues sur un intervalle I, mais où a est susceptible de s'annuler sur I. Nous allons voir sur des exemples que les résultats précédents, comme le théorème de Cauchy, peuvent alors tomber en défaut.

Supposons par exemple que a s'annule en un unique point t_0 de I. On procèdera alors comme suit.

▶ *Pour résoudre (E) sur I :*

- *On commence par résoudre l'équation sur les intervalles $I_g =]-\infty, t_0[\cap I$ et $I_d =]t_0, +\infty[\cap I$ où a ne s'annule pas.*
- *On cherche ensuite une solution f de (E) sur I. On remarque que f est solution de (E) sur I_g. On en connait donc la forme explicite $f = f_g$. De même sur l'intervalle I_d, on connait la forme f_d de f. La fonction f étant solution de (E) sur I, la fonction $t \in I \setminus \{t_0\} \mapsto \begin{cases} f_g(t) \text{ si } t \in I_g \\ f_d(t) \text{ si } t \in I_d \end{cases}$ doit être :*
  - *prolongeable par continuité en t_0,*
  - *de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (c'est à dire en t_0)*
  - *solution de l'équation différentielle sur I (c'est à dire en t_0).*

On va voir sur des exemples que ces conditions sont satisfaites dans certains cas, pas dans d'autres.

Exemple. Déterminer les solutions de (E) : $ty' - 2y = t^3$ sur $\mathbb{R}$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficients variables et continus, non normalisée. On commence par la résoudre sur des intervalles sur lesquels $t \neq 0$, soit sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. On montre alors alors que :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*} = \{t \to \lambda t^2 + t^3, \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ et } \mathcal{S}_{\mathbb{R}_-^*} = \{t \to \mu t^2 + t^3, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

On cherche à présent les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Soit f une solution de l'équation sur $\mathbb{R}$. Elle est donc solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, et on a :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, f(t) = \lambda t^2 + t^3 \text{ pour tout } t > 0,$$

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, f(t) = \mu t^2 + t^3 \text{ pour tout } t < 0.$$

Prenons $t = 0$ dans l'équation, on obtient : $0 \times f'(0) - 2f(0) = 0$, soit $f(0) = 0$.
La fonction f doit être continue et dérivable en 0. D'où :

$$\lim_{x \to 0^+} f(t) = f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(t).$$

Ici on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \lambda t^2 + t^3 = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0^-} \mu t^2 + t^3 = 0.$$

Donc cette condition est bien satisfaite pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On étudie la dérivabilité :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda t^2+t^3}{t} = 0$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\mu t^2+t^3}{t} = 0.$$

Là encore, cette condition est bien satisfaite pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Finalement, on obtient que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 \text{ si } t \geq 0 \\ \mu t^2 + t^3 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On représente plusieurs de ces solutions :

Remarque. Le problème de Cauchy $\begin{cases} (E) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ a donc une infinité de solutions. À l'opposé, le problème de Cauchy $\begin{cases} (E) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ n'a aucune solution. On voit ici que le théorème de Cauchy tombe en défaut en $t = 0$, là où le coefficient t de y' s'annule.

Exemple. Résoudre $(1-t)y' - y = t$ sur $\mathbb{R}$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficients variables et continus, non normalisée. On commence par la résoudre sur des intervalles sur lesquels $1 - t \neq 0$, soit sur $]1, +\infty[$ et sur $]-\infty, 1[$. On montre alors alors que :

$$\mathcal{S}_{]1,+\infty[} = \{t \to \frac{\lambda}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)}, \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ et } \mathcal{S}_{]-\infty,1[} = \{t \to \frac{\mu}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On cherche à présent les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Soit f une solution l'une d'elles. On a alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{\lambda}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)} \text{ pour tout } t > 1,$$

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{\mu}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)} \text{ pour tout } t < 1.$$

Prenons $t = 1$ dans l'équation, on obtient : $0 \times f'(1) - f(1) = 1$, soit $f(1) = -1$.
La fonction f doit être continue et dérivable en 1 :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\lambda}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)} = \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda > -1/2 \\ -\infty \text{ si } \lambda < -1/2 \\ -1 \text{ si } \lambda = -1/2 \end{cases}.$$

Ainsi on a nécessairement $\lambda = -1/2$. De même, $\mu = -1/2$. On obtient alors $f(t) = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

Finalement, on obtient qu'il y a une unique solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, qui est :

$$t \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}.$$

Le problème de Cauchy $\begin{cases}(E)\\ y(1)=0\end{cases}$ n'a pas de solution dans ce cas. Le problème de Cauchy $\begin{cases}(E)\\ y(1)=-1\end{cases}$ a pour sa part une unique solution.

2 Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

On désigne toujours par $\mathbb{K}$ l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$.

2.1 Généralités

Définition.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{K}$ ($a \neq 0$), et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** :

$$ay'' + by' + cy = f(t) \qquad (E)$$

La fonction f s'appelle le **second membre**. On appelle **solution sur** I de (E) toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I telle que :

$$\forall t \in I,\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t).$$

La courbe représentative d'une solution y sur I est alors appelée **courbe intégrale** sur I.

Remarque. Soit y une solution de (E) sur I, alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. En effet, elle est supposée deux fois dérivable sur I. De plus f'' est continue sur I puisque $y''(t) = \frac{1}{a}f(t) - \frac{b}{a}y'(t) - \frac{c}{a}y(t)$.

Exemples d'équations différentielles linéaires du premier ordre.

♦ La tension U aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R, une bobine d'inductance L et un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$LCU'' + RCU' + U = E(t).$$

♦ L'intensité I dans un circuit LC constitué d'un condensateur de capacité R et d'une bobine d'inductance L vérifie l'équation différentielle :

$$I'' + \frac{1}{LC}I = 0.$$

2.2 Résolution de l'équation homogène

Définition.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{K}$ ($a \neq 0$), et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle linéaire suivante :

$$ay'' + by' + cy = f(t) \qquad (E)$$

On appelle **équation différentielle homogène (sans second membre)** associée à (E) l'équation :

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (E_0)$$

Propriété 10

L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_0$ de (E_0) est stable par combinaison linéaire, c'est à dire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall f, g \in \mathcal{S}_0, \lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_0.$$

Preuve.

□

Propriété 11

Pour $r \in \mathbb{K}$, la fonction $t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $ar^2 + br + c = 0$.

Définition.

On appelle équation caractéristique associée à (E) l'équation $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Propriété 12 (Résolution de l'équation homogène **dans** $\mathbb{C}$)

On considère trois nombres $a, b, c \in \mathbb{C}$ où $a \neq 0$, et l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + c = 0 \tag{E_0}$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique.

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes r et r'. Les solutions complexes de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{rt} + \mu e^{r't} \ ; \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$: l'équation caractéristique admet une racine double $r = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{C}$. Les solutions complexes de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{rt}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda + \mu t)e^{rt} \ ; \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Preuve. Soit r une solution de l'équation caractéristique (qui existe toujours sur $\mathbb{C}$). La fonction $t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.
Posons maintenant $y(t) = u(t)e^{rt}$ avec u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On montre alors que y est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si u est solution de l'équation :

$$au''(t) + (2ar + b)u'(t) + (ar^2 + br + c)u(t) = 0.$$

Puisque $ar^2 + br + c = 0$ et $r + r' = -b/a$, soit $2ar + b = a(r - r')$, celle-ci s'écrit :

$$u''(t) + (r - r')u'(t) = 0.$$

On obtient ici une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en u'

- Si $\Delta = 0$, alors $r = r'$ et l'équation devient $u''(t) = 0$, d'où :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} : \quad u(t) = \lambda + \mu t \quad \text{et} \quad y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}.$$

- Si $\Delta \neq 0$, alors r et r' sont distinctes, et la résolution de l'équation donne $u'(t) = \lambda e^{(r-r')t}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, et donc :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} : \quad u(t) = \lambda e^{(r-r')t} + \mu \quad \text{et} \quad y(t) = \lambda e^{rt} + \mu e^{r't}.$$

□

Propriété 13 (Résolution de l'équation homogène **dans** $\mathbb{R}$)

On considère trois nombres $a, b, c \in \mathbb{R}$ où $a \neq 0$, et l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + c = 0 \qquad (E_0)$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique.

- Si $\Delta > 0$: l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r et r'. Les solutions de (E_0) sont alors les fonctions de la forme : $t \mapsto \lambda e^{rt} + \mu e^{r't}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- Si $\Delta = 0$: l'équation caractéristique admet une racine double $r \in \mathbb{R}$. La solution générale de (E_0) est $x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- Si $\Delta < 0$: l'équation caractéristique admet deux solutions complexes non réelles $\alpha \pm i\beta$, (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$). La solution générale de (E) est $x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque. Comme vu dans le chapitre précédente, le troisième point peut se réécrire sous la forme $x \mapsto e^{\alpha x}(A\cos(\beta x + \phi))$, avec $(A, \phi) \in \mathbb{R}^2$.

Preuve. Notons d'abord que les solutions à valeurs réelles de cette équation sont des solutions à valeurs complexes caractérisées par le fait qu'elles sont égales à leur conjugué). On a donc selon le signe du discriminant :

- si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines distinctes $r < r'$. Les solutions complexes sont les fonctions de la forme :
$$t \mapsto \lambda e^{rt} + \mu e^{r't}$$
avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Ces solutions sont réelles si pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\lambda e^{rt} + \mu e^{r't} = \bar{\lambda} e^{rt} + \bar{\mu} e^{r't}$$
soit si $\lambda = \bar{\lambda}$ et $\mu = \bar{\mu}$ (quitte à prendre $t = 0$ ou à faire $t \to +\infty$).
Inversement si $\lambda = \bar{\lambda}$ et $\mu = \bar{\mu}$, l'égalité précédente est bien vérifiée.
Les solutions réelles dans ce cas sont donc les fonctions de la forme
$$t \mapsto \lambda e^{rt} + \mu e^{r't} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
On traite le cas $\Delta = 0$ de façon similaire.
- si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. Les solutions complexes sont les fonctions de la forme :
$$t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t}$$
avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Ces solutions sont réelles si pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t} = \bar{\lambda} e^{(\alpha-i\beta)t} + \bar{\mu} e^{(\alpha+i\beta)t}$$
soit si $\lambda = \bar{\mu}$ (quitte à prendre $t = 0$ ou $t = \pi/2\beta$).
Inversement si $\lambda = \bar{\mu}$, l'égalité précédente est bien vérifiée.
Si on note $\lambda = a + ib$, les solutions réelles sont donc les fonctions de la forme (avec $a, b \in \mathbb{R}$)
$$t \mapsto (a + ib)e^{(\alpha+i\beta)t} + (a - ib)e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(2a\cos(\beta t) - 2b\sin(\beta t)).$$

□

Remarque. On dit que l'ensemble des solutions de (E_0) forme un plan vectoriel, puisque celles-ci sont combinaisons linéaires de deux fonctions non proportionnelles (que ce soit dans le cas réel ou complexe).

Exemple. Déterminer les solutions réelles et complexes de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$, et montrer qu'elles tendent vers 0 en $+\infty$.

2.3 Résolution de l'équation avec second membre

Propriété 14

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{K}$ ($a \neq 0$), et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = f(t) \qquad (E)$$

Alors toute solution de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_P de (E) une solution de l'équation homogène associée (E_0). Ainsi l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) satisfait :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0.$$

Preuve.

□

Remarque.

- Pour obtenir l'ensemble des solutions de (E), il faudra donc déterminer une solution particulière de (E), et lui ajouter l'ensemble des solutions de (E_0) (dont on a vu la forme).
- L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc la somme d'un point y_p et de combinaisons linéaires de deux fonctions non proportionnelles. On dit alors que $\mathcal{S}$ est un plan affine.

Propriété 15 (Principe de superposition)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{K}$ ($a \neq 0$), et $f_1, f_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur I et les équations différentielles :

$$(E_1) : \ ay'' + by' + cy = f_1(t) \quad \text{et} \quad (E_2) : \ ay'' + by' + cy = f_2(t)$$

Si y_1 est solution sur I de (E_1), y_2 est solution sur I de (E_2), alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution sur I de :

$$ay'' + by' + cy = \lambda f_1 + \mu f_2.$$

Preuve.

□

Propriété 16 (Solution particulière avec second membre exponentiel-polynôme)

On considère des nombres $a, b, c, \lambda \in \mathbb{K}$ (où $a \neq 0$), une fonction polynomiale P à coefficients dans $\mathbb{K}$ et l'équation différentielle linéaire :

$$ay'' + by' + c = e^{\lambda t} P(t). \qquad (E)$$

Alors l'équation (E) a au moins une solution particulière de la forme $t \mapsto e^{\lambda t} t^m Q(t)$ où Q est une fonction polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $\deg(Q) = \deg(P)$ et :

- $m = 0$ si λ n'est pas racine du polynôme caractéristique,
- $m = 1$ si λ est racine simple du polynôme caractéristique,
- $m = 2$ si λ est racine double du polynôme caractéristique,

Exemple. Déterminer les solutions réelles de (E) : $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$.

L'équation caractéristique de (E) est $r^2 - 3r + 2 = 0$, dont les solutions sont 1 et 2. Ainsi la solution générale de l'équation homogène associée à (E) est $x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Comme 2 est solution simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y : x \mapsto xQ(x)e^{2x}$, avec Q fonction polynomiale de degré 1, donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telles que $Q(x) = (ax+b)$. y est deux fois dérivable comme produit de fonctions qui le sont, et $y'(x) = (2ax+b)e^{2x}+2(ax^2+bx)e^{2x} = (2ax^2+2bx+2ax+b)e^{2x}$, puis $y''(x) = (4ax+2b+2a)e^{2x}+2(2ax^2+2bx+2ax+b)e^{2x} = (4ax^2+4bx+8ax+4b+2a)e^{2x}$. En reportant dans (E), il vient

$$xe^x = (4ax^2 + 4bx + 8ax + 4b + 2a)e^{2x} - 3(2ax^2 + 2bx + 2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx)e^{2x} = 2axe^{2x} + (b + 2a)e^{2x}$$

donc $2a = 1$ et $b + 2a = 0$ par unicité des coefficients d'un polynôme, i.e. $a = \frac{1}{2}$ et $b = -1$.

Une solution particulière est donc $x \mapsto (\frac{1}{2}x^2 - x)e^{2x}$ et la solution générale de (E) est $x \mapsto (\frac{1}{2}x^2 - x)e^{2x} + \lambda e^{2x} + \mu e^x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2.4 Résolution avec conditions initiales

Définition.

Étant donnés trois nombres a, b, c de $\mathbb{K}$ $(a \neq 0)$ et une fonction continue $f : I \to \mathbb{K}$, on considère l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = f(t). \tag{E}$$

Le **problème de Cauchy** associé à un triplet $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K}^2$ est la recherche des solutions de (E) vérifiant les deux conditions initiales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$.

Propriété 17

Pour $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy associé aux conditions initiales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$ admet une solution unique sur I.

Propriété 18

On considère trois nombres a, b, c de $\mathbb{R}$ $(a \neq 0)$, une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ et l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = f(t). \tag{E}$$

(1) Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $M_0(t_0, y_0)$ de $I \times \mathbb{R}$ avec une tangente de pente donnée $y_0' \in \mathbb{R}$ en ce point.

(2) Deux telles courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $I \times \mathbb{R}$ avec une tangente commune.

Preuve. Le premier point est une reformulation du résultat précédent. Montrons le deuxième point : supposons que deux courbes intégrales se coupent en $M_0(t_0, y_0)$ avec une tangente commune de pente $y_0' \in \mathbb{R}$. Notons y_1 et y_2 les solutions de (E) sur I correspondantes. Elles sont donc toutes deux solutions du même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (E) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

Par unicité, on a donc $y_1 = y_2$. □

Remarque. La seule solution de (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$ telle que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ est la fonction nulle. En effet, la fonction nulle est solution de (E_0). Et par la proposition précédente, c'est l'unique solution telle que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$.

2.5 Application aux oscillateurs linéaires

Considérons le mouvement d'une masse m suspendue à un ressort vertical de raideur K et de longueur L, et soumise à une force de frottement fluide (par exemple en plaçant l'oscillateur dans un liquide visqueux) $\vec{F_f} = -\alpha\vec{v}$.

1. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, montrer que l'équation du mouvement est régie par l'équation différentielle :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = 0 \text{ avec } \begin{cases} 2\lambda = \frac{\alpha}{m} \text{ le } \textbf{coefficient d'amortissement} \text{ de l'oscillateur} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ qui représente sa } \textbf{pulsation propre} \end{cases}$$

   Si l'origine est en haut du ressort et l'axe vertical orienté vers le bas, la loi fondamentale de la dynamique donne :
$$mz'' = -\alpha z' - K(z - L) + mg \text{ ou } mz'' + \alpha z' + Kz = KL + mg.$$
   Cette équation équation différentielle a un second membre constant, et on vérifie que $z_0 = L + mg/K$ est solution constante (correspondant à l'équilibre). En portant l'origine en z_0, i.e. en posant $Z = z - z_0$, on obtient :
$$mZ'' + \alpha Z' + KZ = 0 \text{ ou } Z'' + 2\lambda Z' + \omega_0^2 Z = 0.$$

2. On précise les conditions initiales: $z(0) = 10$ et $z'(0) = 0$ (c'est à dire qu'on suppose l'oscillateur lâché sans vitesse initiale après avoir tiré d'une longueur 10 à partir de sa position d'équilibre).
   (a) Avec $\lambda = 0, \omega_0 = 1$, déterminer l'expression explicite du mouvement.
   (b) Avec $\lambda = \omega_0 = 1$, déterminer l'expression explicite du mouvement.
   (c) Avec $\lambda = 1, \omega_0 = \sqrt{5}$, déterminer l'expression explicite du mouvement.

Interprétation géométrique. Dans ce dernier cas, on observe un **comportement transitoire** qui présente quelques oscillations périodiques avant de retrouver un **état stable**.

3. Supposons toujours $\lambda = 1, \omega_0 = \sqrt{5}$. On impose à présent à l'extrémité supérieure du ressort un mouvement verticale sinusoïdale de sorte que son ordonnée à l'instant t est $f(t) = 5\cos(t)$. Déterminer une expression explicite du mouvement. Déterminer le comportement asymptotique des solutions (état stable).

Vocabulaire. Le second membre d'une équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(t)$ est également appelé **signal d'entrée** et les solutions de l'équation définiront la **réponse du système** étudié. On parle de **régime libre** si f est la fonction nulle, et de régime forcé sinon. Dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti en régime libre, on parle de :

- **régime apériodique** quand $\lambda > \omega_0$,
- **régime critique** quand $\lambda = \omega_0$,
- **régime pseudo-périodique** quand $\lambda < \omega_0$.