Chapitre 9

Ensembles usuels de nombres

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint-Louis (Paris)

mansuy.mathieu@hotmail.fr

1 Nombres entiers, décimaux, rationnels

Définition.

- On appelle ensemble des entiers naturels, l'ensemble $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$
- On appelle ensemble des entiers relatifs l'ensemble $\mathbb{Z}$ constitué des entiers naturels et de leurs opposés.
- On appelle nombre décimal un nombre x admettant un nombre fini de chiffres après la virgule, c'est-à-dire un nombre de la forme $\frac{p}{10^n}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.
- On appelle nombre rationnel un quotient d'entiers relatifs, c'est-à-dire un nombre de la forme $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Remarques.

- On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- Ces inclusions sont strictes. En particulier, un nombre rationnel n'est pas forcément décimal : $\frac{1}{3}$ par exemple ne peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{10^n}$. Si c'était le cas, on aurait $3p = 10^n$, donc 3 divise 10^n, ce qui est absurde.

2 Les nombres réels

2.1 Borne supérieure, borne inférieure

Rappel. $\mathbb{R}$ est muni d'une relation de comparaison $\leq$ qui est dite relation d'ordre total.

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :

- $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A si : $\forall a \in A,\ a \leq M$.
- $m \in \mathbb{R}$ un minorant de A si : $\forall a \in A,\ m \leq a$.
- $M \in \mathbb{R}$ est le plus grand élément de A (ou maximum) si : $M \in A$ et M est un majorant de A. Un tel élément est unique, noté $M = \max(A)$.
- $m \in \mathbb{R}$ est le plus petit élément de A (ou minimum) si : $m \in A$ et m est un minorant de A. Un tel élément est unique, noté $m = \min(A)$.

Définition.

- Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On appelle **borne supérieure de** A le plus petit des majorants de A. Un tel élément est unique, noté $\sup(A)$.
- Soit B une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On appelle **borne inférieure de** A le plus grand des minorants de A. Un tel élément est unique, noté $\inf(A)$.

Notons que l'unicité de la borne supérieure (resp. inférieure) est une conséquence de l'unicité du plus petit élément (resp. plus grand élément) d'un ensemble. L'existence découle du théorème suivant :

Théorème 1

$\mathbb{R}$ a la propriété de la borne supérieure, c'est à dire :

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Remarque. On prendra garde au fait qu'une partie A peut posséder une borne supérieure sans avoir de plus grand élément. Inversement, si A possède un plus grand élément a, alors $a = \sup(A)$: en effet,

- pour tout $b \in A$, on a $b \leq a$, donc a est un majorant de A ;
- si M est un majorant de A, alors pour tout $b \in A$, $b \leq M$. En particulier, $a \leq M$

Ainsi a est le plus petit des majorants : $a = \sup(A)$.

Exercice. Compléter :

	$\min(A)$	$\inf(A)$	$\max(A)$	$\sup(A)$
$A = \{1\}$	1	1	1	1
$A = \{2, 4\}$	2	2	4	4
$A =]1, 5[$	$\times$	1	$\times$	5
$A = [-5, 0[$	-5	-5	$\times$	0
$A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$	$\times$	0	1	1
$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$	$\times$	$-\sqrt{2}$	$\times$	$\sqrt{2}$
$A = [2, 4[\cap\mathbb{Q}$	2	2	$\times$	4

Montrons cela pour $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$.

- 1 est un élément de A, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1/n \leq 1$. Donc $1 = \max(A) = \sup(A)$.
- 0 est un minorant de A. Et si m minorant de A, on a $m \leq 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par passage à la limite, on obtient $m \leq 0$. Ainsi 0 est le plus grand des minorants de A. C'est donc la borne inférieure : $\inf(A) = 0$.
- Enfin supposons que A possède un plus petit élément a. Alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = 1/k$. Mais alors $\frac{1}{k+1} \in A$, et $\frac{1}{k+1} < a$. D'où une contradiction.

Théorème 2 (Caractérisation de la borne supérieure)

Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M = \sup(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall M' \text{ majorant de } A, M \leq M' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall b < M, b \text{ n'est pas un majorant de } A \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq M \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } M - \epsilon < x \end{cases} \end{aligned}$$

Théorème 3 (Caractérisation de la borne inférieure)

Soit B une partie minorée non vide et $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} m = \inf(B) &\Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \forall m' \text{ minorant de } B, m' \leq m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \forall a > m, a \text{ n'est pas un minorant de } B \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in B,\ x \geq m \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists x \in B \text{ tel que } x < m + \epsilon \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple. Soient A et B deux parties majorées non vides de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b\ ;\ (a, b) \in A \times B\}$. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

- Comme A et B sont non vides, $C = A+B$ est non vide. Pour tout $x \in C$, il existe $(a, b) \in A \times B$ tels que $x = a + b$. De plus, $a \leq \sup(A)$ et $b \leq \sup(B)$ donc $x \leq \sup(A) + \sup(B)$. Ainsi C est majorée par $\sup(A) + \sup(B)$, donc admet une borne supérieure.
- Montrons que $\sup A + \sup B$ est le plus petit des majorants de C. Soit M un majorant de C, on a donc pour tout $a \in A$ et $b \in B$, $a + b \leq M$. Ainsi $a \leq M - b$, et ceci pour tout $a \in A$. $M - b$ est donc un majorant de A. Par comparaison d'un majorant au plus petit d'entre eux, on obtient $\sup(A) \leq M - b$. On obtient alors $b \leq M - \sup(A)$ et ce pour tout $b \in B$. De même, par comparaison d'un majorant au plus petit d'entre eux, on obtient $\sup(B) \leq M - \sup(A)$. Finalement $\sup(A) + \sup(B) \leq M$.

On a finalement montré que $\sup(A)+\sup(B)$ est un majorant de C, et c'est le plus petit des majorants de C. Donc $\sup(C) = \sup(A) + \sup(B)$.

2.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Rappel. On appelle **intervalle de** $\mathbb{R}$ toute partie I non vide de $\mathbb{R}$ de la forme suivante :

- si I est majorée et minorée, $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$;
- si I est majorée et non minorée, $I =]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$, $]-\infty, b[$;
- si I est minorée et non majorée, $I = [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geq a\}$, $]a, +\infty[$:
- ou bien si $I = \mathbb{R}$.

Propriété 4 (caractérisation des intervalles)

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors:

I est un intervalle $\Leftrightarrow$ I est une **partie convexe**: $\forall\ (x, y) \in I^2,\ [x, y] = \{tx+(1-t)y,\ t \in [0, 1]\} \subset I$

Preuve. L'implication $\Rightarrow$ est clairement vérifiée. Montrons l'implication réciproque. Soit donc I une partie convexe et non vide de $\mathbb{R}$. Il faut discuter des cas où I est majorée ou non, minorée ou non. Traitons le cas suivant : supposons que I soit majorée et minorée, et que $b = \sup(I), a = \inf(I) \notin I$ (i.e. I n'a pas de plus grand ni de plus petit élément). Montrons que $I =]a, b[$.

$\subset$ soit $x \in I$. Alors puisque $b = \sup(I)$ et $a = \inf(I)$, on a $a \leq x \leq b$. De plus ces égalités sont strictes, puisque $a, b \notin I$. Ainsi $x \in]a, b[$.

- $\supset$ soit $x \in]a, b[$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $a + \epsilon \leq x \leq b - \epsilon$. Par propriété de la borne supérieur et inférieure, il existe $y, z \in I$ tels que $y < a + \epsilon$ et $z > b - \epsilon$. Mais alors par hypothèse, $[y, z] \subset I$. Puisque $x \in [y, z]$, on a donc $x \in I$. On a donc montré que $]a, b[\subset I$.

□

2.3 Partie entière

Propriété 5

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p \leq x < p + 1.$$

Définition.

Cet unique entier relatif, noté $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$, est appelé **partie entière de** x.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$, et considérons l'ensemble $B = \{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$. B est une partie non vide de $\mathbb{Z}$ et majorée. On sait alors qu'elle possède un plus grand élément p. Alors

$$p \in B \Rightarrow p \leq x,$$

$$p + 1 \notin B \Rightarrow p + 1 > x.$$

Montrons à présent l'unicité : soient p_1, p_2 tels que

$$p_1 \leq x < p_1 + 1 \text{ et } p_2 \leq x < p_2 + 1.$$

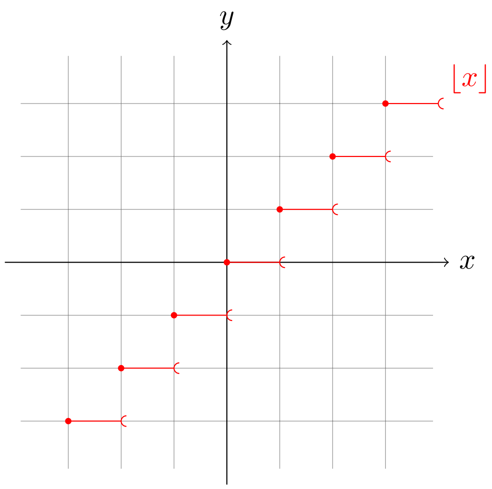
Alors $-p_2 - 1 < -x \leq -p_2$ et par somme on obtient

$$p_1 - p_2 - 1 < 0 < p_1 - p_2 + 1.$$

Puisque $p_1 - p_2 \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $p_1 - p_2 = 0$. □

Remarque. La partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Exemple. $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor e \rfloor = 2$, $\lfloor -e \rfloor = -3$.



2.4 Approximations décimales

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $p_n = \lfloor 10^n x \rfloor$ est l'unique entier tel que :

$$p_n \leq 10^n x \leq p_n + 1, \text{ soit } \frac{p_n}{10^n} \leq x \leq \frac{p_n + 1}{10^n}.$$

Définition.

Le nombre décimal $\frac{p_n}{10^n}$ est appelé **approximation décimale par défaut de x à la précision** 10^{-n}. Le nombre $\frac{p_n + 1}{10^n}$ est appelé approximation décimale par excès de x à la précision 10^{-n}.

Exemple. $1,414 \leq \sqrt{2} < 1,415$ à 10^{-3} près, $3,1415 \leq \pi < 3,1416$ à 10^{-4} près.

Remarque. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \frac{p_n}{10^n}$ l'approximation décimale par défaut de x. On a alors $0 \leq x - u_n \leq 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on obtient par le théorème des gendarmes $\lim_{n \to +\infty} u_n = x$. On a ainsi obtenu une suite (u_n) de nombres rationnels qui tend vers $x \in \mathbb{R}$. On traduit cette propriété en disant que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.