Complément 2

Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans toute cette note de cours, f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles. On étudie la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Résultats à connaitre

L'ensemble des résultats présentés dans cette section pourront être utilisés sans démonstration.

Définition.

On dit que l'intervalle J est stable par f si $f(J) \subset J$.

Remarque. Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :

- soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations ;
- soit directement à l'aide d'inégalités.

Dans tous les cas et avant de commencer l'étude de la suite (u_n), il est impératif de faire l'étude de f, d'en dresser son tableau de variation et de tracer son graphe.

Propriété 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $J \subset I$ est stable par f. Si $u_0 \in J$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $u_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Preuve. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{P}(n)$: u_n est bien définie et $u_n \in J$.

- On a $u_0 \in J$ dans $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n.

  On a par hypothèse de récurrence $u_n \in J \subset \mathcal{D}_f$. Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie. De plus, puisque J est un intervalle stable, $u_{n+1} \in f(J) \subset J$. D'où la propriété au rang $n+1$.

On conclut par principe de récurrence. $\square$

Propriété 2 (Monotonie de (u_n))

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = a \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Si f est **croissante** sur I alors la suite (u_n) est monotone :

1. Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors (u_n) est croissante.
2. Si $f(u_0) - u_0 \leq 0$, alors (u_n) est décroissante.

Preuve. Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors $u_1 \geq u_0$. La relation $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ permet alors de montrer par récurrence que (u_n) est croissante.
On procède de même si $f(u_0) - u_0 \leq 0$ pour montrer que (u_n) est décroissante □

Remarque. Pour déterminer la monotonie de (u_n), il s'agira de déterminer le signe de $x \mapsto f(x) - x$ sur I, et de dresser éventuellement son tableau de signe.

Propriété 3 (Convergence de (u_n))

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a \in I$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si f est **continue** sur I et si (u_n) converge vers $l \in I$ alors $f(l) = l$. On dit que l est un point fixe de f.

Preuve. On utilise la caractérisation séquentielle de la continuité : f est continue en $l \in I$ et (u_n) converge vers l, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$. □

Remarque. Pour déterminer les points fixes de f, on étudie les points d'annulation de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur I.

Définition.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est contractante si elle est k-lipschitzienne, avec $0 \leq k < 1$.

Remarque. Supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ soit de plus dérivable. Pour montrer que f est contractante sur I, on pourra tenter de majorée sa dérivée f' sur I par une constante $k < 1$. Par l'inégalité des accroissements finis, on en déduira que f est contractante.

Propriété 4

Soit $f : I \to I$ une fonction contractante. Si f admet un point fixe l, alors l est unique et toute suite définie par récurrence par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.

Preuve.

- Supposons avoir un deuxième point fixe $l_1 \neq l \in I$. Alors $|f(l) - f(l_1)| \leq k|l_1 - l|$ i.e. $|l - l_1| \leq k|l - l_1|$ i.e. $1 \leq k$ (car $|l - l_1| > 0$)... absurde ! Ainsi si f admet un point fixe l, celui-ci est unique.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $|u_n - l| \leq k^n|u_0 - l|$.

  $\mathcal{P}(0)$ est évidente.

  Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Par hypothèse de récurrence, on a $|u_n - l| \leq k^n|u_0 - l|$. Alors on a :

  $$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq k|u_n - l| \leq k \times k^n|u_0 - l| = k^{n+1}|u_0 - l|.$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

  Comme $k \in]0, 1[$, $(k^n|u_0 - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

□

Remarque. Il faut savoir redémontrer l'inégalité suivante :

$$|u_n - l| \leq k^n|u_0 - l| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Calcul approché du point fixe. Si $I = [a, b]$, le calcul précédent nous donne une estimation de l'erreur :

$$|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l| \leq k^n |b - a|.$$

Ainsi, u_n constitue une estimation du point fixe l de f avec une précision au moins égale à $k^n|b - a|$.

Résultats à redémontrer systématiquement

Les résultats de cette section devront être redémontré systématiquement lors de l'étude d'une suite récurrente.

Propriété 5

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$. Si f est **décroissante** sur I, alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonie contraire.

Preuve. Posons $g = f \circ f$. Cette application est croissante sur I. Posons $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Les deux suites vérifient $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f\left(f(u_{2n})\right) = g(u_{2n}) = g(v_n)$ et de même $w_{n+1} = g(w_n)$. Le point 1 permet alors d'en déduire que chacune des suites (v_n) et (w_n) est monotone. Supposons, par exemple que (v_n) est croissante. On peut donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \leq v_{n+1}$. En appliquant la fonction f décroissante, on en déduit $f(v_n) \geq f(v_{n+1})$ c'est à dire $w_n \geq w_{n+1}$. La suite (w_n) est donc décroissante.
Si l'on suppose désormais que la suite (v_n) est décroissante, on peut déduire de la même manière que (w_n) est croissante. □

Remarque. Il s'agira donc

- de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
- d'étudier le signe de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de (u_{2n}) et (u_{2n+1}):
  - si $g(u_0) - u_0 \geq 0$ (resp. ≤ 0), (u_{2n}) est croissante (resp. décroissante).
  - si $g(u_1) - u_1 \leq 0$ (resp. ≥ 0), (u_{2n+1}) est décroissante (resp. croissante).

Remarque. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, c'est vers des points fixes de $g = f \circ f$. Il s'agit alors de montrer que ces deux sous suites convergent vers le même point fixe α. On peut alors conclure que (u_n) converge vers α grâce au résultat connu suivant :

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent **vers la même limite** l, alors la suite (u_n) converge vers l.