Complément 4

Applications linéaires d'un espace euclidien

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Formes linéaires sur un espace euclidien

Dans tout ce chapitre, E désigne un **espace euclidien**, c'est à dire un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $< \cdot\,;\ \cdot >$ et de dimension finie.

1.1 Représentations des formes linéaires

Propriété 1

Pour toute forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$, il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) =< v, x > .$$

En d'autres termes, l'application $v \in E \mapsto \varphi_v =< v;\ \cdot >\in E^*$ est un isomorphisme (où $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ désigne le dual de E, i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires de E).

Preuve. L'appliaction $\Phi : v \in E \mapsto \varphi_v =< v;\ \cdot >\in E^*$ est linéaire de E dans E^* car

$$\varphi_{\lambda u+\mu v} =< \lambda u + \mu v;\ \cdot >= \lambda < u;\ \cdot > +\mu < v;\ \cdot >= \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v.$$

Φ est injective car si $v \in \ker(\Phi)$, on a $\Phi(v) = \varphi_v = 0_{E^*}$. D'où pour tout $x \in E$, $\varphi_v(x) = 0$ et en particulier pour $x = v$,

$$\varphi_v(v) =< v; v >= ||v||^2 = 0$$

et $v = 0_E$. Enfin Φ est un isomorphisme puisqu'elle est linéaire injective et que $\dim(E) = \dim(E^*)$. □

1.2 Application à l'adjoint d'un endomorphisme

Propriété 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $f^* \in \mathcal{L}(E)$, appelé l'**adjoint de** f, tel que l'on ait :

$$\forall x, y \in E, < x, f(y) >=< f^*(x), y > .$$

Preuve. Pour tout $x \in E$, on considère l'application $y \in E \mapsto< x, f(y) >\in \mathbb{R}$. C'est une forme linéaire sur E, et par la proposition précédente il existe un unique vecteur que l'on note $f^*(x) \in E$ tel que l'on ait :

$$\forall y \in E, < x, f(y) >=< f^*(x), y > .$$

On définit ainsi une application f^* associant à tout vecteur x de E, le vecteur $f^*(x)$ de E. On montre alors que cette application est linéaire : pour tout $x_1, x_2, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} < f^*(\lambda x_1 + \mu x_2), y > &= < \lambda x_1 + \mu x_2, f(y) >= \lambda < x_1, f(y) > +\mu < x_2, f(y) > \\ &= \lambda < f^*(x_1), y > +\mu < f^*(x_2), y >=< \lambda f^*(x_1), y > + < \mu f^*(x_2), y > \\ &= < \lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2), y > . \end{aligned}$$

Ainsi on a montré que pour tout $y \in E$, $< f^*(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2)), y >= 0$. En prenant $y = f^*(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2))$ on obtient

$$||f^*(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2))||^2 = 0$$

et donc $f^*(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2)$. □

Propriété 3

On a les propriétés suivantes

- $\forall f \in \mathcal{L}(E), (f^*)^* = f$.
- $\forall f, g \in \mathcal{L}(E), (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$, $(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$.

Preuve. Ceci résulte directement des égalités suivantes : pour tout $x, y \in E$,

$$< (f^*)^*(x), y >=< x, f^*(y) >=< f(x), y >$$

pour le premier point,

$$< (g \circ f)^*(x), y >=< x, g \circ f(y) >=< g^*(x), f(y) >=< f^* \circ g^*(x), y >$$

pour le deuxième point. Le dernier point est laissé en exercice. □

Remarque.

- On montre facilement que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda \mathrm{Id}_E)^* = \lambda \mathrm{Id}_E$.
- Si f est un automorphisme de E, on a $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. On montre alors que f^* est aussi un automorphisme, et que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$, car :

$$(f \circ f^{-1})^* = (f^{-1})^* \circ f^* = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad (f^{-1} \circ f)^* = f^* \circ (f^{-1})^* = \mathrm{Id}_E.$$

Exemples : adjoints d'endomorphismes simples

- L'adjoint d'un projecteur p est un projecteur. En effet, la relation $p \circ p = p$ implique $p^* \circ p^* = p^*$ par passage à l'adjoint.
- De même l'adjoint d'une symétrie s est une symétrie en utilisant la relation caractéristique $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Propriété 4

Pour tout endomorphisme f de l'espace euclidien E, on a

$$\ker(f^*) = (\mathrm{im}(f))^\perp \text{ et } \mathrm{im}(f^*) = (\ker(f))^\perp.$$

Preuve. La deuxième égalité se déduit de la première en passant à l'orthogonal, puis en changeant f en f^* compte-tenu de $(f^*)^* = f$. Pour la première, on a

$$\begin{aligned} x \in \ker(f^*) & \Leftrightarrow f^*(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow \forall y \in E, < f^*(x), y >= 0 \\ & \Leftrightarrow \forall y \in E, < x, f(y) >= 0 \\ & \Leftrightarrow x \in (\mathrm{im}(f))^\perp. \end{aligned}$$

□

Propriété 5

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par f (i.e. $f(F) \subseteq F$). Alors $F^{\perp}$ est un sous espace vectoriel stable par f^*.

Preuve. Ceci résulte de l'égalité suivante :

$$\forall x \in F^{\perp}, \forall y \in F, < f^*(x), y >=< x, f(y) >= 0 \text{ puisque } f(y) \in F.$$

D'où $f^*(x) \in F^{\perp}$. □

Propriété 6

Soit $\mathcal{B}$ une <u>base orthonormale</u> de E. La matrice de l'adjoint f^* de f dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de f :

$$\mathcal{M}(f^*, \mathcal{B}) = {}^t\mathcal{M}(f, \mathcal{B}).$$

<u>ATTENTION</u>, ceci n'est vrai que si la base est orthonormale.

Preuve. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Dans cette base orthonormée, on sais que pour tout $v \in E$:

$$v = \sum_{1 \leq j \leq n} < v, e_j > e_j.$$

Ainsi :

$$f^*(e_i) = \sum_{1 \leq j \leq n} < f^*(e_i), e_j > e_j = \sum_{1 \leq j \leq n} < e_i, f(e_j) > e_j.$$

Or $< e_i, f(e_j) >$ est la i-ème composante du vecteur $f(e_j)$, i.e. $m_{j,i}$. D'où l'égalité matricielle. □

Remarque. De ce résultat et des propriétés de la trace et du déterminant, on en déduit

$$\det(f^*) = \det(f) \text{ et } \mathrm{Tr}(f^*) = \mathrm{Tr}(f).$$

2 Automorphismes orthogonaux

2.1 Définitions et propriétés

<u>**Définition.**</u>

On dit qu'un endomorphisme f est **orthogonal** (ou isométrie vectorielle) si f conserve la norme euclidienne :

$$\forall x \in E, \quad ||f(x)|| = ||x||.$$

Remarque. Un endomorphisme orthogonal est bijectif : en effet on a pour tout $x \in Ker(f)$:

$$0 = ||f(x)|| = ||x||.$$

Ainsi $x = 0_E$ et $Ker(f)$ est réduit au vecteur nul. f est donc un endomorphisme injectif, en dimension finie. f est bien un automorphisme, appelé aussi **automorphisme orthogonal**.

Propriété 7

Il y a équivalence entre :

(1) f est orthogonal ;

(2) f conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E$, $< f(x), f(y) >=< x, y >$;

(3) f transforme toute base orthonormale en une base orthonormale.

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que f est orthogonal, i.e. que f conserve la norme euclidienne. On a alors pour tout $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} < f(x), f(y) > &= \frac{1}{4}(||f(x)+f(y)||^2 - ||f(x)-f(y)||^2) = \frac{1}{4}(||f(x+y)||^2 - ||f(x-y)||^2) \\ &= \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2) =< x, y > . \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Supposons que f est conserve le produit scalaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E, et $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$. Alors pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on a :

$$< f(e_i), f(e_j) >=< e_i, e_j >= \delta_{i,j}.$$

Donc $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supposons que f transforme toute base orthonormale en une base orthonormale. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E, et $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ la base orthonormale image. Soit $x \in E$, $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. On a :

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n).$$

On a :

$$||x|| = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \text{ et } ||f(x)|| = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

puisque $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale. Ainsi $||f(x)|| = x$ pour tout $x \in E$, et f conserve la norme.

$\square$

Propriété 8

Soient f, g des automorphismes orthogonaux. Alors $f \circ g$ et f^{-1} sont orthogonaux.
L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est appelé **groupe orthogonal** de E et noté $O(E)$.

Preuve.

- $\forall f, g \in O(E)$, $g \circ f \in O(E)$ puisqu'on a $\forall x \in E, ||g \circ f(x)|| = ||f(x)|| = ||x||$.
- $\forall f \in O(E)$, $f^{-1} \in O(E)$ puisqu'on a $\forall x \in E, ||f^{-1}(x)|| = ||f \circ f^{-1}(x)|| = ||x||$.

$\square$

Propriété 9

Soit f un endomorphisme orthogonal de E. Si un sous-espace F est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.

Preuve. Supposons que F soit stable par F, i.e. $f(F) \subseteq F$. f induit sur F un endomorphisme qui est toujours orthogonal (il conserve toujours la norme des vecteurs de F par exemple). En particulier f est bijective, et $f(F) = F$. Dès lors, pour tout $y \in F$ et $z \in F^\perp$, il existe $x \in F$ tel que $f(x) = y$ et

$$< y, f(z) >=< f(x), f(z) >=< x, z >= 0.$$

D'où $f(F^\perp) \subseteq F^\perp$. □

Exemple : symétries orthogonales et réflexions

Rappelons qu'une symétrie s est orthogonale si c'est la symétrie par rapport à un sous-espace F dans la direction du sous-espace orthogonal $F^\perp$.

Propriété 10

Une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonale de E.

Notons qu'en dépit du vocabulaire utilisé, une projection orthogonale (différente de l'identité) n'est en revanche pas un endomorphisme orthogonal (elle n'est même pas bijective !).

Preuve. Soit donc s une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace F dans la direction du sous-espace orthogonal $F^\perp$. Pour montrer que $s \in O(E)$, on va montrer par exemple que s conserve la norme euclidienne. Pour cela soit $x \in E = F \oplus F^\perp$. Il existe $y \in F$ et $z \in F^\perp$ tels que $x = y + z$, et :

$$||s(x)||^2 = ||s(y+z)||^2 = ||y-z||^2 = ||y||^2 + ||z||^2 = ||y+z||^2 = ||x||^2$$

les troisièmes et quatrièmes égalités étant obtenues par application du théorème de Pythagore. □

Définition.

On appelle **réflexion** de E toute symétrie orthogonale r par rapport à un hyperplan H de E (i.e. un sev H de E de dimension $\dim(E) - 1$).

Propriété 11

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, M la matrice de f dans une base orthonormée. Alors on a l'équivalence :

$$f \in O(E) \quad \Leftrightarrow \quad {}^tMM = I_n.$$

Preuve. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base orthonormale considérée. On a alors les équivalences suivantes :

$$f \in O(E) \quad \Leftrightarrow \quad (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ base orthonormale} \quad \Leftrightarrow \quad (C_1, \dots, C_n) \text{ base orthonormale de } \mathbb{R}^n$$

où $C_1, \dots, C_n$ désignent les vecteurs colonnes de M. Or on a :

$${}^tMM = (< C_i, C_j >)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Ainsi $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $< C_i, C_j >= \delta_{i,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$, soit encore ${}^tMM = I_n$. D'où le résultat. $\square$

Remarque. En prenant le déterminant dans la relation précédente, on obtient :

$$1 = \det(I_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = \det(M)^2.$$

Ainsi si f est un automorphisme orthogonal, $\det(f) = \det(M) \pm 1$, ce qui justifie la définition suivante :

Définition.

Un endomorphisme orthogonal f de E sera dit :

- **direct** si $\det(f) = 1$,
- **indirect** si $\det(f) = -1$.

On appelle **groupe spécial orthogonal** le sous-ensemble de $O(E)$ des automorphismes orthogonaux de déterminant 1, noté $SO(E)$. Ses éléments sont appelés **rotations**.

2.2 Matrices orthogonales

Définition.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est un automorphisme orthogonal.

Propriété 12

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) M est orthogonale ;

(2) ${}^tMM = I_n$;

(3) $M{}^tM = I_n$;

(4) les vecteurs colonne de M forment une base orthonormale ;

(5) les vecteurs ligne de M forment une base orthonormale.

Preuve. Notons f l'endomorphisme de E canoniquement associé à M.

(1) $\Rightarrow$ (2) Déjà démontré.

(2) $\Rightarrow$ (4) Si on note $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de M, on a :

$${}^tMM = (< C_i, C_j >)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Ainsi si ${}^tMM = I_n$, alors $< C_i, C_j >= \delta_{i,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormale d

(4) $\Rightarrow$ (1) Si $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, alors f transforme la base canonique (qui est orthonormale) en une base orthonormale. Donc f est un automorphisme orthogonal.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Immédiat puisque $M^{-1} =^t M$.

(3) $\Leftrightarrow$ (5) Même preuve que précédemment.

□

Remarque. En pratique c'est plutôt la caractérisation (4) qu'on utilisera pour montrer qu'une matrice donnée est orthogonale.

Exercice. Considérons la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

a) Montrer que f est un automorphisme orthogonal.

b) Chercher $Ker(f - Id_E)$, $Ker(f + Id_E)$ et en déduire la nature géométrique de f.

Remarque. Si M est orthogonale, alors :

- M est inversible et $M^{-1} =^t M$;
- $\det(M) = \pm 1$.

Notations. On note $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales, et $SO(n)$ le sous ensemble de $O(n)$ des matrices orthogonales directes, i.e. celles de déterminant 1.

Propriété 13

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Une base $\mathcal{B}'$ de E est orthonormale si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.

Preuve. On note $P = (p_{i,j})_{i,j}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, de vecteurs colonne $C_1, \cdots, C_n$. On a pour tout élément e'_j de la base $\mathcal{B}'$:

$$e'_j = \sum_{1 \leq k \leq n} p_{k,j} e_k.$$

La base $\mathcal{B}'$ est orthonormale si et seulement si pour tout i, j,

$$< e'_i; e'_j >= \sum_{k,l=1}^{n} p_{k,i} p_{k,j} < e_i; e_j >= \sum_{k,l=1}^{n} p_{k,i} p_{k,j} =< C_i; C_j >= \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j, \\ 1 \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Ainsi la base $\mathcal{B}'$ est orthonormale si et seulement si les colonnes $C_1, \cdots, C_n$ de P forment une bon de $\mathbb{R}^n$, donc si et seulement si P est orthogonale. □

Définition.

On dit que E est **orienté** lorsqu'on a convenu qu'une certaine bon $\mathcal{B}$ de E est directe, et on dit alors qu'une autre bon $\mathcal{B}'$ de E est :

- **directe** si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est de déterminant 1.
- **indirecte** si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est de déterminant -1.

3 Automorphismes orthogonaux du plan euclidien P

3.1 Matrices orthogonales d'ordre 2

On considère la matrice d'ordre deux

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Elle est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une bon, i.e. si

$$a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1,\ ac + bd = 0.$$

Les deux premières conditions sont remplies si et seulement s'il existe α, β tels que

$$a = \cos(\alpha),\ c = \sin(\alpha),\ b = \cos(\beta),\ d = \sin(\beta).$$

La troisième condition est alors remplie si et seulement si $\cos(\alpha)\cos[\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) = 0$, soit si $\beta - \alpha = \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On obtient donc deux types de matrices orthogonales d'ordre deux :

- si $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, ce sont les matrices orthogonales directes :

$$A_+(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

- $\beta - \alpha = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, ce sont les matrices orthogonales indirectes :

$$A_-(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Remarque. Par utilisation des formules trigonométriques donnant $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$, on montre que

$$A_+(\alpha)A_+(\beta) = A_+(\alpha + \beta).$$

En particulier on en déduit que

- l'inverse de $A_+(\alpha)$ est $A_+(-\alpha)$ (puisque $A_+(0) = I_2$).
- Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les matrices $A_+(\alpha)$ et $A_+(\beta)$ commutent, puisque

$$A_+(\alpha)A_+(\beta) = A_+(\alpha + \beta) = A_+(\beta)A_+(\alpha).$$

3.2 Automorphismes orthogonaux directs du plan

Les automorphismes orthogonaux directs du plan euclidien sont ceux dont la matrice en base orthonormale est une matrice orthogonale directe, donc de la forme $A_+(\theta)$.

Propriété 14

Soit f un automorphisme orthogonal direct du plan. Alors la matrice de f est la même dans toutes les bases orthonormées directes, de la forme suivante avec $\theta \in \mathbb{R}$:

$$A_+(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le réel θ, défini à un multiple de 2π-près, s'appelle la **mesure de de cette rotation**.

Preuve. Il suffit d'établir qu'une matrice orthogonale directe, donc de la forme $A_+(\theta)$ est invariante par changement de la base orthonormale directe. Soit pour cela P la matrice de passage d'une bond à une bond. Alors P est une matrice orthogonale directe, donc de la forme $A_+(\alpha)$ et on a :

$$A_+(\alpha)^{-1}A_+(\theta)A_+(\alpha) = A_+(\theta)A_+(\alpha)^{-1}A_+(\alpha) = A_+(\theta)$$

□

Remarque. La matrice d'une rotation change dans une bon indirecte : en effet, la matrice de passage est dans ce cas de la forme $P = A_-(\alpha)$, et on vérifie alors par calcul que

$$A_-(\alpha)^{-1}A_+(\theta)A_-(\alpha) = A_+(-\theta).$$

Exemple. Considérons la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Est-elle orthogonale ? Caractériser l'endomorphisme f du plan qui lui est canoniquement associé.

3.3 Automorphismes orthogonaux indirect du plan

Propriété 15

Soit f un automorphisme orthogonal indirect du plan (f orthogonal et $\det(f) = -1$). Alors f est une réflexion (symétrie orthogonale par rapport à une droite).

Preuve. Dans une bon (e_1, e_2), la matrice de f est de la forme suivante, avec $\theta \in \mathbb{R}$:

$$A_-(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On a $A_-(\theta)^2 = I_2$, donc f est une symétrie.

Déterminons $Ker(f - Id)$: soit $x = (x_1, x_2) \in Ker(f - Id)$, on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta)x_1 + \sin(\theta)x_2 = x_1 \\ \sin(\theta)x_1 - \cos(\theta)x_2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos(\theta) - 1)x_1 + \sin(\theta)x_2 = 0 \\ \sin(\theta)x_1 + (1 - \cos(\theta))x_2 = 0 \end{cases}$$

On regarde le déterminant associé :

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) - 1 & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 1 - \cos(\theta)) \end{vmatrix} = 0$$

Donc $f(x) = x \Leftrightarrow (\cos(\theta) - 1)x_1 + \sin(\theta)x_2 = 0$ et $Ker(f - Id) = Vect(-\sin(\theta)e_1 + (\cos(\theta) - 1)e_2)$.

De même, on montre que $Ker(f + Id) = Vect(-\sin(\theta)e_1 + (\cos(\theta) + 1)e_2)$. Les espaces $Ker(f - Id)$ et $Ker(f + Id)$ son bien orthogonaux, puisque :

$$< -\sin(\theta)e_1 + (\cos(\theta) - 1)e_2, -\sin(\theta)e_1 + (\cos(\theta) + 1)e_2 >= 0,$$

donc f est bien une réflexion. □

Exemple. Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Est-elle orthogonale ? Caractériser l'endomorphisme f du plan qui lui est canoniquement associé.