Cours

Coniques

Mathieu Mansuy - Préparation à l'Agrégation Interne de Mathématiques, Université de Franche Comté

`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Généralités sur les coniques affines

Définition.

Dans le plan affine réel $\mathscr{E}$, on appelle *conique* toute courbe $\mathscr{C}$ dont l'équation cartésienne dans un repère affine R est algébrique de degré 2, à coefficients réels, c'est-à-dire de la forme :

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Remarque. La définition est cohérente, car le degré est invariant par changement de repère.

Notation. Le polynôme f ci-dessus peut également s'écrire sous la forme :

$$f(M) = q(\vec{OM}) + L_O(\vec{OM}) + c_O$$

où O est l'origine du repère, et où q, L_O et c_O sont respectivement une forme quadratique sur $\vec{\mathscr{E}}$, une forme linéaire sur $\vec{\mathscr{E}}$ et un scalaire et correspondent respectivement aux termes d'ordre 2, 1 et 0 de l'équation. On notera B la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q, de sorte que $q(\vec{OM}) = B(\vec{OM}, \vec{OM})$.
Rappelons que .... Lade p.393.

Influence d'un changement d'origine. Si on porte l'origine en Ω, on obtient :

$$q(\vec{O\Omega} + \vec{\Omega M}) + L_O(\vec{O\Omega} + \vec{\Omega M}) + c_O = 0$$

ce qui donne :

$$\underbrace{q(\vec{\Omega M})}_{\text{forme quadratique}} + \underbrace{\left(2B(\vec{O\Omega}, \vec{\Omega M}) + L_O(\vec{\Omega M})\right)}_{\text{forme linéaire}} + \underbrace{\left(q(\vec{O\Omega}) + L_O(\vec{O\Omega}) + c_O\right)}_{\text{constante}} = 0.$$

On observe que :

- la forme linéaire L_O devient $L_\Omega = 2B(\vec{O\Omega}, \cdot) + L_O(\cdot)$;
- la constante $c_O = f(O)$ devient $c_\Omega = q(\vec{O\Omega}) + L_O(\vec{O\Omega}) + c_O = f(\Omega)$
- la forme quadratique q est **invariante**.

Existe-t-il un point Ω tel que $L_\Omega = 0$, de sorte que l'équation se réduirait à $q(\vec{\Omega M}) + c_\Omega = 0$?

Définition.

On dit qu'un point Ω tel que $L_\Omega = 0$ est un *centre* pour la conique. Si un tel point existe et est unique, on dit que la conique est une *conique à centre*.

Remarque. Si une conique $\mathscr{C}$ possède un centre Ω, alors Ω est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$. En effet si M' est le symétrique de M par rapport à Ω, on a :

$$f(M') - f(\Omega) = q(\vec{\Omega M'}) = q(-\vec{\Omega M}) = f(M) - f(\Omega).$$

Théorème 1

(1) On obtient les centre éventuels d'une conique $\mathscr{C}$ en annulant les dérivées partielles de f.

(2) Pour que $\mathscr{C}$ soit une conique à centre, il faut et il suffit que la forme quadratique q soit non dégénérée.

Preuve. A faire. □

Remarque. Si q est dégénérée, il peut y avoir aucun centre (ça sera le cas des paraboles) ou une droite affine de centres (cas de deux droites parallèles).

2 Classification des coniques affines

L'origine étant ainsi choisie, on cherche à présent un repère adéquat dans lequel l'équation de la conique est réduite.

2.1 Classification euclidienne des coniques affines

Supposons d'abord $\mathscr{E}$ euclidien. La classification euclidienne des coniques repose sur la « diagonalisation » de q dans une base orthonormée.

Théorème 2 (Classification euclidienne des coniques affines)

Dans un certain repère orthonormé, l'équation d'une conique euclidienne est de l'une des neuf formes suivantes (a, b, k, p sont des réels non nuls) :

- type elliptique :
  - *ellipses réelles :* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
  - ellipses imaginaires : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$;
  - ellipses dégénérées en un point : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$;
- type hyperbolique :
  - *hyperboles :* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
  - hyperboles dégénérées en deux droites : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$;
- type parabolique :
  - *paraboles :* $y^2 = 2px$;
  - paraboles dégénérées en deux droites parallèles réelles : $y^2 = k^2$;
  - paraboles dégénérées en une droite réelle double : $y^2 = 0$;
  - paraboles dégénérées en deux droites imaginaires parallèles : $y^2 = -k^2$.

Remarque. On distinguera dans cette classification les « vraies » coniques (ellipses, hyperboles, paraboles) des autres cas dégénérés. Une solution existe pour détecter les cas de dégénérescence à partir de l'équation : on ajoute une variable afin de définir une forme quadratique $\mathscr{E} \times \mathbb{K}$ comme étant :

$$Q(u, z) = q(u) + L(u)z + cz^2.$$

On l'appelle *l'homogénéisée de q*. On dit que la conique est *propre* lorsque Q est non dégénérée. On peut montrer que les coniques propres sont exactement les coniques de type ellipse, hyperbole ou parabole. Je n'utiliserai cependant pas cet outil. Bien qu'utile, il nécessite pour bien le comprendre des notions de géométrie projective.

Preuve. A faire □

Remarque. Expliquons pourquoi il s'agit bien d'un résultat de classification. Définissons pour cela l'action du groupe $\mathbb{R}^* \times Is(\mathscr{E})$ sur l'ensemble $\mathscr{P}_2$ des polynômes de degré 2 :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^* \times Is(E) \times \mathscr{P}_2 & \to \mathscr{P}_2 \\ (\lambda, \varphi, f) & \mapsto \lambda f \circ \varphi^{-1} \end{cases}.$$

Le résultat précédent décrit les orbites de l'ensemble des coniques pour cette action, et en donne un système de représentants. En effet, dire qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la conique a telle ou telle équation, c'est dire qu'il existe une isométrie qui envoie notre conique sur la conique définie par cette équation type. Ainsi deux coniques sont isométriques si et seulement si elles ont même équation réduite.

Terminologie. On appelle *axe* d'une conique tout axe de symétrie orthogonale. Une ellipse et une hyperbole ont deux axes orthogonaux, une parabole a un seul axe.

Mettre image

On appelle *sommet* d'une conique tout point du plan euclidien où elle coupe un axe : une parabole a un seul sommet, une ellipse a quatre sommets, une hyperbole en a deux. Pour une ellipse, on notera A et A' les sommets sur Ox, et B et B' les sommets sur Oy.
Pour une ellipse, on appellera (AA') le *grand axe* ou *axe focale*, (BB') le *petit axe*. On appelle aussi *grand axe* le segment $[AA']$ ou sa longueur $AA' = 2a$, et *petit axe* le segment $[BB']$, ou sa longueur $2b$.
Pour une hyperbole, (AA') est l'*axe focal*, qui désigne aussi le segment $[AA']$ ou sa longueur $2a$. Les couples des asymptotes de l'hyperbole a pour équation globale $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$. On dit que l'hyperbole est *équilatère* si ses asymptotes sont perpendiculaires, ce qui est le cas si et seulement si $a = b$ (et donc quand l'excentricité e est égale à $\sqrt{2}$).
Pour une parabole d'équation $y^2 = 2px$, p est appelé le *paramètre*.

Paramétrisation

- L'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ peut être paramétrée par $x = a\cos(t)$, $y = b\sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi[$.
- L'hyperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est paramétrée par $x = \pm a\text{ch}(t)$, $y = b\text{sh}(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
- La parabole $y^2 = 2px$ admet la représentation paramétrique $x = \dfrac{t^2}{2p}$, $y = t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Plan d'étude d'une conique affine et exemple

Méthode.
Pour déterminer le type euclidien d'une conique à partir de son équation implicite, on procèdera comme suit :

- *On calcule le déterminant Δ de la matrice symétrique A associée à la forme quadratique.*
- *C'est une ellipse (éventuellement vide ou un point) si $\Delta > 0$ et une hyperbole (éventuellement deux droites sécantes) si $\Delta < 0$. En particulier, c'est une conique à centre dont on obtient les coordonnées en résolvant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

  On place alors l'origine en ce point. On diagonalise A et on obtient les axes de la conique à l'aide des vecteurs propres.
- *Si $\Delta = 0$, il s'agit d'une parabole (éventuellement vide ou réduite à deux droites parallèles, ou à une droite). On diagonalise A en b.o.n. pour obtenir les axes. On fait un changement d'origine pour réduire l'équation sous la forme $Y^2 = 2pX$ si possible.*

Exercice. Nature et éléments caractéristiques (centre éventuel, axes, équation réduite, asymptotes et sommets si hyperbole, excentricité, coordonnées des foyers ?) de la conique d'équation :

$$-3x^2 - 3y^2 - 10xy + 8x - 8y + 8 = 0.$$

La tracer.

On calcule le déterminant de la matrice de la forme quadratique

$$q(x, y) = -3x^2 - 3y^2 - 10xy.$$

Il vaut -16. On est donc dans le cas non dégénéré (conique à centre) et hyperbolique. On cherche le centre en résolvant le système. On trouve $\Omega = (-2, 2)$. Les axes de l'hyperbole s'obtiennent en réduisant :

$$\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

On a deux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres -8 et 2 respectivement. D'où les axes, et l'équation réduite (en notant que $p(\Omega) = -8$ où p est l'équation de la conique) :

$$2x' - 8y' - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x'^2}{4} - y'^2 = 1.$$

On trouve les asymptotes en résolvant $\dfrac{x'^2}{4} - y'^2 = 0$, soit $y' = \pm\dfrac{x'}{2}$.

> L'hyperbole n'est donc pas équilatère (les asymptotes ne sont pas perpendiculaires). Les sommets (intersection avec l'axe des x' qui correspond à la valeur propre >0) sont pour $y' = 0$, et $x' = \pm 2$. On a donc pour sommets $S_1 = (2, 0)$ et $S_2 = (-2, 0)$ dans le nouveau repère.
> D'après l'équation réduite, on a $a = 2$, $b = 1$, et donc $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$ et donc $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$. Enfin les foyers sont de coordonnées $(\pm c, 0) = (\pm\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$.

Exercice. Mêmes questions pour les coniques :

a) $x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 10y + 9 = 0$.

> Voir livre B. Aebischer - Géométrie.

2.2 Classification affine des coniques

De la classification euclidienne, déduisons en maintenant la classification affine.

Théorème 3 (Classification affine)

Dans un repère adéquat, l'équation d'une conique du plan affine réel est de l'une des neufs formes suivantes :

- type elliptique :
  - *ellipses réelles :* $X^2 + Y^2 = 1$;
  - ellipses imaginaires : $X^2 + Y^2 = -1$;
  - ellipses dégénérées en un point : $X^2 + Y^2 = 0$;
- type hyperbolique :
  - *hyperboles :* $X^2 - Y^2 = 1$;
  - hyperboles dégénérées en deux droites : $X^2 - Y^2 = 0$;
- type parabolique :
  - *paraboles :* $Y^2 = X$;
  - paraboles dégénérées en deux droites parallèles réelles : $X^2 = 1$;
  - paraboles dégénérées en une droite réelle double : $X^2 = 0$;
  - paraboles dégénérées en deux droites imaginaires parallèles : $X^2 = -1$.

Preuve. On part de l'équation réduite de la classification précédente, qu'on normalise à l'aide d'affinités. □

Remarque. Il s'agit bien ici aussi d'une classification affine : Deux coniques se déduisent l'une de l'autre par une application affine ssi elles ont même équation réduites. Les équations réduites forment ainsi un système de représentants des orbites pour l'action de $\mathbb{K}^* \times GA(E)$ sur les coniques donnée par :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^* \times GA(E) \times \mathscr{P}_2 & \to \mathscr{P}_2 \\ (\lambda, \varphi, f) & \mapsto \lambda f \circ \varphi^{-1} \end{cases}$$

Remarque. On peut aussi mettre la forme quadratique q en somme de carrés de forme linéaires indépendantes à l'aide de la méthode de Gauss. C'est souvent plus rapide en pratique.

Plan d'étude d'une conique affine et exemples

Pour déterminer le type affine d'une conique à partir de son équation implicite, on peut reprendre le procédé évoqué précédemment, en n'oubliant pas de normaliser les équations réduites obtenues. Mais il sera plus simple en général de procéder ainsi :

Méthode.

Pour déterminer le type affine d'une conique à partir de son équation implicite, on peut procéder comme suit :

- *On décompose en carré la forme quadratique q à l'aide de la méthode de Gauss.*
- *On détermine le type de la conique à l'aide de la signature de q (elliptique si la signature est $(2,0)$, hyperbolique si c'est $(1,1)$, parabolique si q est dégénérée de signature $(1,0)$).*
- *Si c'est une conique à centre (type hyperbolique ou elliptique), on obtient ses coordonnées en résolvant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

  On place alors l'origine en ce point. Et on change le repère à l'aide de la mise en carré de q.
- *Dans le cas parabolique, on change le repère à l'aide de la mise en carré de q. Puis on change l'origine pour regrouper les termes de degrés au plus un.*

Exercice. Type affine, équation réduite et repère adapté pour les coniques suivantes :

1. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x = 0$;
2. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 3y + 3 = 0$.

Ladegaillerie p.432

Exercice. $10x^2 - 6xy + 2y^2 - 3x + 2y = 0$ (cas d'une ellipse).

A taper, poly Coniq

3 Génération monofocale d'une conique

On suppose que $\mathscr{E}$ est euclidien.

Propriété 4

Soit $\mathscr{C}$ une parabole, une ellipse réelle non circulaire ou une hyperbole.
Il existe un point F appelé *foyer*, une droite D ne contenant pas F, appelée directrice, et un nombre réel positif e appelé *excentricité* tels que $\mathscr{C}$ soit l'ensemble des points M tels que :

$$FM = ed(M, D).$$

Inversement, étant donné F, D et e, l'ensemble des points M tels que $FM = ed(M, D)$ est une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$, une hyperbole si $e > 1$.

Preuve. On se place dans un repère orthonormé adéquatement choisi. On écrit la relation $FM = ed(M, D)$ dans ce repère, et on obtient l'équation d'une conique. La valeur de e détermine sont type. Pour plus de détails, voir M. Audin. Géométrie. p.233. $\square$

Remarques.

- Le foyer F est sur un axe de symétrie de la conique, qu'on appelle donc l'*axe focal*, et la directrice D est perpendiculaire à cet axe.
- Par symétrie, les ellipse qui ne sont pas des cercles et les hyperboles ont deux foyers (situés sur le grand axe dans le cas d'une ellipse) et deux directrices parallèles.

Formulaire.

	Ellipse	Hyperbole
Distance focale	$FF' = 2c$ et $a^2 = b^2 + c^2$	$FF' = 2c$ et $c^2 = a^2 + b^2$
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$
Longueur des axes	$AA' = 2a$ et $BB' = 2b$	$AA' = 2a$

Dans le cas de la parabole, notons A le sommet de la parabole, F son foyer, et D la directrice et K le projeté orthogonal de F sur D. Notons $h = d(F, D) = KF$. Comme $e = 1$, on a $AF = d(A, D) = AK$. Ainsi le sommet A de la parabole est le milieu de $[KF]$.

4 Génération bifocale d'une conique

On peut aussi décrire les ellipses et les hyperboles rien qu'à l'aide des deux foyers.

Propriété 5

Une ellipse de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$ pour un certain réel a tel que $2a > FF'$.
Une hyperbole de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$ pour un certain réel positif a tel que $2a < FF'$.

Preuve. Consiste là aussi essentiellement à écrire ces équations dans un repère euclidien bien choisi, à constater qu'il s'agit de coniques et à déterminer leur type. □

5 Autres propriétés

5.1 Propriétés tangentielles

Règle de dédoublement des termes. Soit $M(x_0, y_0)$ un point d'une conique $\mathscr{C}$ d'équation f. On obtient la tangente à $\mathscr{C}$ en M par règle de dédoublement des termes :

$$x^2 \to xx_0 \quad 2x \to x + x_0.$$

Propriété 6

La tangente en un point M à la parabole de foyer F et de directrice D est la médiatrice de $[HF]$, où H est le projeté orthogonal de M sur D. C'est aussi la bissectrice intérieure de l'angle en M dans le triangle isocèle HMF.

Preuve. Comme $e = 1$, on a $HM = MF$, et donc en particulier $FM^2 - HM^2 = 0$. Si $M = M(t)$ est une représentation paramétrique de la parabole, et $H = H(t)$ le projeté orthogonal de M sur D, on a en dérivant par rapport à t :

$$0 = 2\vec{FM} \cdot M' - 2\vec{HM} \cdot (\vec{M}' - \vec{H}') \underbrace{=}_{\vec{H}' \perp \vec{HM}} 2\vec{FM} \cdot M' - 2\vec{HM} \cdot \vec{M}' = 2\vec{FH} \cdot \vec{M}'.$$

□

Conséquence. Tout rayon lumineux parallèle à l'axe d'un miroir parabolique se réfléchit en un rayon passant par le foyer : un miroir parabolique concentre donc la lumière au foyer. Cette propriété est utilisée dans certains télescopes et dans les fours solaires.

Propriété 7

La tangente au point M à une ellipse (resp. hyperbole) est la bissectrice extérieure (resp. intérieure) de l'angle en M du triangle FMF'.

Preuve. S'obtient en dérivant $FM + F'M = 2a$ ou $FM - F'M = \pm 2a$ (chaque choix de signe correspondant à une branche de l'hyperbole). □

5.2 Ellipses et affinités orthogonales

On appelle *cercle principal* d'une ellipse le cercle de diamètre $[AA']$ et *cercle secondaire* celui de diamètre $[BB']$.

Propriété 8

L'ellipse de centre O, d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ dans un repère orthonormé est la transformée de son cercle principal $\mathscr{C}(O, a)$ (resp. de son cercle secondaire $\mathscr{C}(O, b)$) par l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport b/a (resp. d'axe Oy et de rapport a/b).
L'image d'un cercle ou d'une ellipse par une affinité orthogonale quelconque est une ellipse.

Donnons des conséquences de ce résultat.

Propriété 9

L'aire du domaine délimité par une ellipse de demi-axes a et b est égale à πab.

Preuve. Comme une affinité orthogonale de rapport k multiplie les aires par k, l'aire de l'ellipse se déduit de celle πa^2 de son cercle principal. □

Construction des tangentes parallèles à la direction d'une droite Δ.
A faire.

Construction des tangentes issues d'un point P donné.
A faire.