Leçon 262

Étude métrique des courbes planes

Dans toute la suite, (I, M) désignera une courbe (ou arc) paramétrée, c'est-à-dire la donnée d'un intervalle réel I et d'une application $M : t \in I \mapsto M(t)$ associant à un paramètre t un point $M(t)$ du plan.

1 Rappels : courbes paramétrées du plan

1.1 Plan d'étude d'une courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes

Soit (I, M) un arc paramétré. Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On pose pour tout $t \in I$, $\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$.

Pour étudier l'arc paramétré (I, M), on procèdera par étape :

(1) *Étude et réduction du domaine de définition.*

(2) *Calcul du vecteur dérivé et tangentes à l'arc.*

Lorsque l'arc est $\mathscr{C}^1$, on calcule le vecteur dérivé :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j}.$$

Un point de paramètre $t_0 \in I$ est dit :

- *régulier* si $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$. La tangente à l'arc en ce point est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)$. Son équation cartésienne est donnée par :

$$0 = \det\left(\overrightarrow{M(t_0)M(x,y)}, \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)\right) = \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)).$$

- *singulier* ou *stationnaire* si $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0) = \overrightarrow{0}$. S'il est de classe suffisante, la tangente en ce point est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par le premier vecteur-dérivé non nul en t_0 s'il existe. Si on note p son indice, et $q > p$ l'indice du premier vecteur dérivé non nul indépendant du précédent, alors la position locale du support de l'arc par rapport à sa tangente en $M(t_0)$ est :
  - ordinaire si p impair et q pair.
  - d'inflexion si p impair et q impair.
  - de rebroussement si p pair.

  Si l'arc n'est pas de classe suffisante, on peut aussi obtenir la pente de la tangente en un point singulier :
  - soit en calculant $\displaystyle\lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$,
  - soit en calculant, si elle existe, la limite $\displaystyle\lim_{t \to t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

(3) *Étude des variations des coordonnées x et y.*

(4) *Étude des branches infinies.*

- Si $x \to a \in \mathbb{R}$ et $y \to \pm\infty$ (ou inversement) : asymptote verticale (ou horizontale) d'équation $x = a$ (ou $y = a$).
- Si $x \to \pm\infty$ et $y \to \pm\infty$, on regarde la limite $\lim \dfrac{y}{x}$.
  - Si ce rapport tend vers $+\infty$ (resp. 0) : branche parabolique de direction $(0y)$ (resp. (Ox)).

- Si ce rapport tend vers $m \in \mathbb{R}$, on regarde $\lim y - mx$.
  - Si $y - mx \to \ell$: asymptote oblique $y = mx + \ell$.
  - Si $y - mx \to \pm\infty$: branche parabolique de direction $y = mx$.

- *Construction du support de l'arc.*

Exercice. Étude et tracé de la courbe paramétrée $t \mapsto (R(t - \sin(t)), R(1 - \cos(t))$ (appelée cycloïde).

- *Étude et réduction du domaine de définition.*

  L'arc est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$, et on remarque que :

  - $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi R$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$: on étudie l'arc sur $[-\pi, \pi]$ et on effectuera sur la courbe des translations de vecteur $2\pi R\overrightarrow{i}$;
  - $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$: on étudie l'arc sur $[0, \pi]$ et on aura l'ensemble du support par symétrie d'axe (Oy), puis par translations de vecteur $2\pi R\overrightarrow{i}$.

- *Calcul du vecteur dérivé.*

  L'arc est bien de classe $\mathscr{C}^1$ (même $\mathscr{C}^\infty$) comme composée de fonctions qui le sont, et on a :

  $$x'(t) = R(1 - \cos(t)) \quad \text{et} \quad y'(t) = R\sin(t).$$

  Sur l'intervalle $[0, \pi]$, seul le point de paramètre 0 est donc stationnaire.

- *Étude local au point stationnaire $M(0)$.*

  On a :

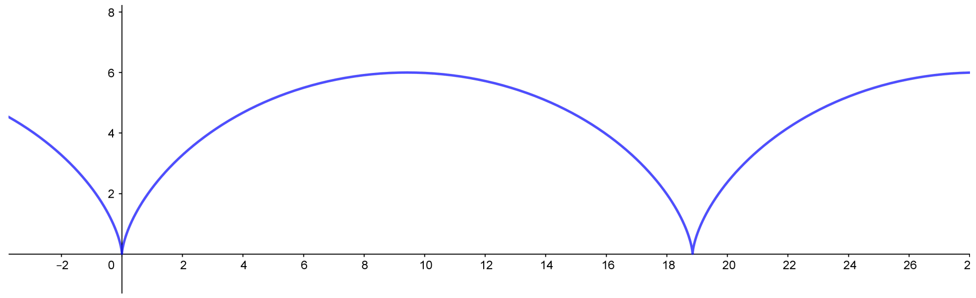
  $$\frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}(0) = R\overrightarrow{j}.$$

  Puisque le premier vecteur-dérivé non nul en $M(0)$ est d'indice pair ($p = 2$), c'est un point de rebroussement en lequel la tangente est dirigée par $\overrightarrow{j}$. On peut de plus montrer que $\frac{\overrightarrow{d^3M}}{dt^3}(0)$ est non colinéaire à $\frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}(0)$. C'est donc un point de rebroussement de première espèce (ce qu'on pouvait deviner du fait de la symétrie d'axe (Oy)).

- *Étude des variations des coordonnées x et y.*

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	πR
y	0	$\nearrow$	$2\pi R$
$y'(t)$	0	$+$	0

- *Tracé (pour $R = 3$).*



1.2 Plan d'étude d'une courbe paramétrée en coordonnées polaires

Soit (I, M) arc paramétré du plan affine euclidien orienté. On note $\overrightarrow{u(\theta)} = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{OM} = r(\theta)\overrightarrow{u(\theta)}$. Pour étudier l'arc paramétré (I, M), on procèdera par étape :

(1) *Étude et réduction du domaine.*

(2) *Calcul du vecteur dérivé et tangentes à l'arc.*

Dans le cas où l'arc est $\mathscr{C}^1$, on a :

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = r'(\theta)\overrightarrow{u(\theta)} + r(\theta)\overrightarrow{v(\theta)}.$$

En particulier, seul O peut être un point stationnaire. On obtient la pente de la tangente :

- en un point régulier ($\neq O$) grâce au rapport $\dfrac{r(\theta_0)}{r'(\theta_0)}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{u(\theta_0)}, \overrightarrow{v(\theta_0)})$.
- en O : vecteur $\overrightarrow{u(\theta_0)}$.

(3) *Étude des branches infinies.*

- Si $r(\theta) \to \pm\infty$ lorsque $\theta \to \theta_0 \in \mathbb{R}$: dans le repère $(O, \overrightarrow{u}(\theta_0), \overrightarrow{v}(\theta_0))$, les coordonnées de $M(\theta)$ sont :
$$X(\theta) = r(\theta)\cos(\theta - \theta_0) \quad \text{et} \quad Y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta - \theta_0).$$
On a $\dfrac{Y(\theta)}{X(\theta)} = \tan(\theta - \theta_0) \underset{\theta \to \theta_0}{\to} 0$, d'où deux cas :
  - si $Y(\theta) \to L \in \mathbb{R}$: asymptote d'équation $Y = L$ dans le repère $(O, \overrightarrow{u}(\theta_0), \overrightarrow{v}(\theta_0))$;
  - si $Y(\theta) \to \pm\infty$: branche parabolique de direction (OY) dans le repère $(O, \overrightarrow{u}(\theta_0), \overrightarrow{v}(\theta_0))$.
- Si $\theta \to \pm\infty$, on a plusieurs cas :
  - si $r(\theta) \to 0$: O est point asymptote (et la courbe s'enroule sur O) ;
  - si $r(\theta) \to L \neq 0$: $\mathscr{C}(O, |L|)$ est cercle asymptote ;
  - si $r(\theta) \to \pm\infty$: spirale.

(4) *Etude du signe de r et tracé.*

Exercice. Étudier et représenter l'arc d'équation polaire $r(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$ (cardioïde).

- *Étude et réduction du domaine de définition.*

  L'arc est défini pour $\theta \in \mathbb{R}$, et on remarque que :
  - $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$: on obtient tout le support de l'arc en faisant varier θ dans un intervalle de longueur 2π, comme $[-\pi, \pi]$.
  - $r(-\theta) = r(\theta)$: on étudie l'arc sur $[0, \pi]$, et on aura l'ensemble du support par symétrie par rapport à l'axe (Ox).
  - *Calcul du vecteur-dérivé et tangentes à l'arc.*

    L'arc est de classe $\mathscr{C}^1$ (même $\mathscr{C}^\infty$) comme composée de fonctions qui le sont. On obtient en dérivant $\overrightarrow{OM}(\theta) = a(1 - \cos(\theta))\overrightarrow{u}(\theta)$:
$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = a\sin(\theta)\overrightarrow{u}(\theta) + a(1 - \cos(\theta))\overrightarrow{v}(\theta) = a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos(\theta/2)\overrightarrow{u}(\theta) + \sin(\theta/2)\overrightarrow{v}(\theta)\right).$$

Notons en particulier que :

* pour $\theta = \pi$, on a $r(\pi) = 2a$ et la tangente a une pente verticale par rapport à $\overrightarrow{i}$;
* pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, on a $r(\pi/2) = a$ et la tangente a pour pente -1 par rapport à $\overrightarrow{i}$;
* pour $\theta = 0$, le vecteur dérivé est nul et on a un point stationnaire. La tangente est alors dirigée par $\overrightarrow{u}(0) = \overrightarrow{i}$ (puisque la position limite de la droite $OM(\theta)$, qui est dirigée par $\overrightarrow{u}(\theta)$, est la droite (Ox) qui est dirigée par $\overrightarrow{u}(0) = \overrightarrow{i}$).

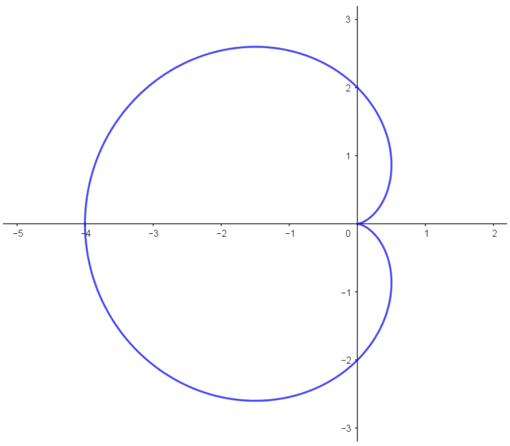
– *Étude locale au point stationnaire $M(0)$.*
On calcule les vecteurs dérivés successifs. On trouve :

$$\frac{\overrightarrow{d^2M}}{d\theta^2}(0) = a\overrightarrow{u}(0) = a\overrightarrow{u}(0) = a\overrightarrow{i}.$$

On retrouve que la tangente est dirigée par $\overrightarrow{i}$. De plus, comme le premier vecteur-dérivé non nul est d'indice pair ($p = 2$), c'est un point de rebroussement. On peut de plus montrer que $\dfrac{\overrightarrow{d^3M}}{d\theta^3}(0)$ est non colinéaire à $\dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{d\theta^2}(0)$. C'est donc un point de rebroussement de première espèce (ce qu'on pouvait deviner du fait de la symétrie d'axe (Ox)).

– *Étude du signe de r.*
Sur $[0, \pi]$, $r(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$ est positif et croissant.

– *Tracé (pour $a = 2$).*
On place les points $M(0)$ où la tangente est horizontale, $M(\pi/2)$ où la tangente est parallèle à la deuxième bissectrice et $M(\pi)$ où la tangente est verticale, et on trace l'arc (en pensant à faire la symétrie d'axe (Ox) pour finir).



2 Étude métrique des courbes planes

Dans toute la suite, l'étude se situe dans le plan affine euclidien, le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|$.

2.1 Longueur d'un arc rectifiable

Définition.

Soit $([a, b], M)$ un arc paramétré du plan affine euclidien. On appelle :

- *ligne polygonale inscrite dans l'arc* toute suite de points de l'arc $M_0 = M(t_0), \dots, M_n = M(t_n)$ avec $a = t_0 < \dots < t_n = b$.
- *longueur* de cette ligne polygonale le réel :

$$L(M_0, \dots, M_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\|$$

.

On note $\mathscr{L}([a,b],M)$ l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans $([a,b],M)$.

Définition.

On dit que l'arc paramétré $([a,b],M)$ est *rectifiable* si l'ensemble $\mathscr{L}([a,b],M)$ est majoré. On note alors $L([a,b])$ sa borne supérieure, appelée longueur de l'arc.

Remarque. Soit $c \in [a,b]$. On montre facilement que :

$$([a,b],M) \text{ est rectifiable } \Leftrightarrow ([a,c],M) \text{ et } ([c,b],M) \text{ sont rectifiables}$$

et alors : $L([a,b]) = L([a,c]) + L([c,b])$.

Propriété 1

Soit $([a,b],M)$ arc continu et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors il est rectifiable, et on a :

$$L([a,b]) = \int_a^b \left\| \frac{\overrightarrow{dM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\| \mathrm{d}t.$$

Preuve. Quitte à prendre une subdivision, on se ramène à l'étude d'un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment. Faisons donc la preuve en supposant l'arc $([a,b],M)$ est de classe $\mathscr{C}^1$. On identifie le plan affine euclidien à $\mathbb{C}$, afin de définir l'arc $([a,b],M)$ à l'aide de sa fonction affixe $t \in [a,b] \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$.

Prenons une ligne polygonale définie par la suite $a = t_0 < \cdots < t_n = b$. On a :

$$\sum_{i=0}^{n-1} |z(t_{i+1}) - z(t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} z'(t)\,\mathrm{d}t \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |z'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |z'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai pour n'importe quelle ligne polygonale, on en déduit que $\mathscr{L}([a,b],M)$ est majoré. Ainsi l'arc est rectifiable, et on a par comparaison d'un majorant au plus petit d'entre eux :

$$L([a,b]) \leq \int_a^b |z'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Posons à présent $s(t) = L([a,t])$. Fixons $h > 0$. $|z(t+h) - z(t)|$ est la longueur de la ligne polygonale $t < t+h$ pour l'arc $([t,t+h],M)$, et $L([t,t+h])$ est un majorant de $\mathscr{L}([t,t+h],M)$, d'où :

$$|z(t+h) - z(t)| \leq L([t,t+h]) \underset{\text{additivité}}{=} s(t+h) - s(t) \leq \int_t^{t+h} |z'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

On obtient en divisant par $h > 0$:

$$\frac{|z(t+h) - z(t)|}{h} \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |z'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit que $s'_d(t)$ existe et vaut $|z'(t)|$. On procède de même pour $h < 0$ et la dérivée à gauche. D'où le résultat. □

Formules.

- En coordonnées cartésiennes, on a $\dfrac{dM}{\mathrm{d}t}(t) = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j}$, et donc :

$$L([a,b]) = \int_a^b (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t.$$

- En coordonnées polaires, on a $\frac{dM}{d\theta}(\theta) = r'(\theta)\overrightarrow{u(\theta)} + r(\theta)\overrightarrow{v(\theta)}$, et donc :
$$L([a,b]) = \int_a^b (r(\theta)^2 + r'(\theta)^2)^{1/2}\mathrm{d}\theta.$$

Remarque. Cette formule intégrale simple conduit cependant à des intégrales impossibles à calculer à l'aide des fonctions usuelles, y compris pour des courbes simples comme l'ellipse. Cette impossibilité, notée dès la fin du $XVII^{\text{ème}}$ siècle a été à la base du développement ultérieur de la théorie des fonctions elliptiques.

Exercice. Calculer la longueur :

- d'une arche de la cycloïde ;
- de la cardioïde.

- On obtient une arche de la cycloïde pour t décrivant $[0, 2\pi]$. Sa longueur est donc :
$$L = R\int_0^{\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin(t)^2}\,\mathrm{d}t$$
Comme $(1-\cos(t))^2 + \sin(t)^2 = 2(1-\cos(t)) = 4\sin^2(t/2)$, il vient $L = 8R$.
- Même chose en remarquant qu'on obtient la cardioïde pour θ décrivant $[0, 2\pi]$:
$$L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(\theta))^2 + \sin(\theta)^2}\mathrm{d}\theta = 8a.$$

2.2 Changement de paramètre admissible et abscisse curviligne

Jusqu'ici, on n'a utilisé pour un arc paramétré $t \in I \mapsto M(t)$ que le paramètre donné t. Mais il y a d'autres paramétrages possibles d'un arc. Ainsi, dans le cadre cinématique, on peut repérer $M(t)$ par le temps t, mais aussi par la distance parcourue depuis un point initial (ce qui correspondra à une abscisse curviligne), le problème étant de pouvoir passer de l'un à l'autre de ces paramètres. Tout ceci conduit à la définition suivante.

Définition.

On dit que deux arcs paramétrés (I, M) et (J, N) de classe $\mathscr{C}^k$ sont $\mathscr{C}^k$ équivalents s'il existe un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : J \to I$, appelé *changement de paramètre admissible*, tel que $N = M \circ \varphi$.

On définit ainsi une relation d'équivalence $\sim$ sur l'ensemble des arcs paramétrés du plan, et on appelle :

- *arc géométrique de classe $\mathscr{C}^k$* toute classe d'équivalence pour la relation d'équivalence $\sim$;
- *paramétrage admissible de l'arc géométrique* tout représentant d'une orbite.

Remarque. Rappelons que :
$$\begin{aligned} \varphi : J \to I \ \mathscr{C}^k\text{-difféomorphisme} \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi \text{ bijective et } \varphi \text{ et } \varphi^{-1} \text{ sont } \mathscr{C}^k \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi' \neq 0 \text{ sur } J \quad \Leftrightarrow \quad \varphi' \text{ de signe constant.} \end{aligned}$$

Lorsque $\varphi' > 0$ sur J (resp. $\varphi' < 0$ sur J), (I, M) et (J, N) sont dit de même sens (resp. de sens opposés). Dans ce cas, $M(t)$ et $M(\varphi(u))$ parcourent le support dans le même sens (resp. dans le sens inverse) lorsque t et u croissent.

Remarque. On vérifie aisément que les propriétés des arcs paramétrés sont invariants par changement de paramétrage admissible (support, tangentes, branches infinies)

Notation. On notera abusivement $M(u)$ au lieu de $M(\varphi(u))$, la notation indiquant alors que l'arc est paramétré par u, et non par t. Il faut alors indiquer les dérivations par rapport à telle ou telle variable en utilisant clairement les symboles de dérivation $\frac{d}{dt}$ ou $\frac{d}{du}$.

Définition.

Soit (I, M) un arc paramétré continu et $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Pour tout $t_0 \in I$, on définit :

- *l'abscisse curviligne d'origine t_0 orientée positivement* par l'application :

$$s : t \in I \mapsto \begin{cases} L([t_0, t]) & \text{si } t \geq t_0 \\ -L([t_0, t] & \text{si } t < t_0 \end{cases}.$$

- *l'abscisse curviligne d'origine t_0 orientée négativement* par l'application :

$$s : t \in I \mapsto \begin{cases} -L([t_0, t]) & \text{si } t \geq t_0 \\ L([t_0, t] & \text{si } t < t_0 \end{cases}.$$

Propriété 2

Soit (I, M) un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^k$. S'il est **régulier**, ses abscisses curvilignes sont de classe $\mathscr{C}^k$ et réalisent un changement de paramètre admissible.

Preuve. On a pour tout $t \in I$, $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left\| \frac{\overrightarrow{dM}}{\mathrm{d}t}(u) \right\| \mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\mathrm{d}u$. Comme l'arc est de classe $\mathscr{C}^k$ et régulier, $u \mapsto x'(u)^2 + y'(u)^2$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ et à valeurs strictement positives. Par composition, s est donc de classe $\mathscr{C}^k$ et $s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} > 0$. Elle réalise bien un changement de paramètre admissible. $\square$

Remarque. Avec cette nouvelle paramétrisation par l'abscisse curviligne, on a :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{ds} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\frac{1}{\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|} \text{ de norme 1.}$$

Le paramétrage de la courbe par l'abscisse curviligne correspond donc à un parcours de l'arc géométrique à vitesse constante égale à 1.

Précisions. Reprenons le calcul précédent, qui a pu vous paraitre peu rigoureux. Considérons pour cela deux paramétrages admissibles $M : t \in I \mapsto M(t)$ et $N : s \in J \mapsto N(s) = M \circ \varphi^{-1}(s)$, et $\varphi : t \in I \mapsto s \in J$ le changement de paramétrage admissible correspondant. On a par les formules de dérivations usuelles, en notant $t = \varphi^{-1}(s)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{dN}}{ds}(s) &= \overrightarrow{\frac{d}{ds}(M \circ \varphi^{-1})}(s) = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(\varphi^{-1}(s)) \times \frac{d}{ds}(\varphi^{-1})(s) \\
&= \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(\varphi^{-1}(s))) \times \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) \times \frac{1}{\varphi'(t)} \\
&= \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)\frac{1}{\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)\right\|}
\end{aligned}$$

2.3 Repère de Frenet

On introduit à présent le repère de Frenet (1816 - 1900) d'un arc plan : il s'agit, comme on va le voir, du repère orthonormé direct qui est le mieux adapté à l'étude locale d'un arc.

Pour toute la suite de ces notes, on fixe une orientation du plan euclidien, en prenant la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ directe. Soit (I, M) un arc paramétré **régulier**, paramétré par l'abscisse curviligne. Nous venons de montrer que le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}$ est unitaire, et tangent à la courbe au point $M(s)$ de même sens que la dérivée $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)$. Nous allons construire ce qu'on appelle le repère de Frenet à partir de ce vecteur.

Définition.

On appelle *repère de Frenet* en $M(s)$ le repère orthonormé direct $(M(s), \overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s))$ où :

$$\overrightarrow{T}(s) = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds}(s) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{N}(s) = r_{O,\frac{\pi}{2}}\left(\overrightarrow{T}(s)\right)$$

où $r_{O,\frac{\pi}{2}}$ désigne la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2.4 Courbure

On considère dans la suite des arcs **réguliers** de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geq 2$, paramétrés par l'abscisse curviligne orientée positivement.

Pour tout $s \in J$, $\overrightarrow{T}(s)$ est unitaire. Il existe donc $\alpha(s) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{T}(s) = \cos(\alpha(s))\,\overrightarrow{i} + \sin(\alpha(s))\,\overrightarrow{j}.$$

Ces fonctions α donnent des mesures à 2π près de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T})$, dont on montre qu'elles peuvent être choisies de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.

Propriété 3 (*Théorème de relèvement*)

Il existe $\alpha : I \to$ de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ tel que :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{ds} = \overrightarrow{T} = \cos(\alpha(s))\,\overrightarrow{i} + \sin(\alpha(s))\,\overrightarrow{j}.$$

Si α_1 et α_2 conviennent, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha_2 = \alpha_1 + 2k\pi$.

Preuve. Voir par exemple [1] p.358 □

Remarque. $\alpha(s)$ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T})}$, et $\overrightarrow{N}(s) = -\sin(\alpha(s))\,\overrightarrow{i} + \cos(\alpha(s))\,\overrightarrow{j}$.

Définition.

Désignant par α une fonction de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ telle que $\alpha = \widehat{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T})}$, on appelle *fonction courbure* de (I, M) la fonction c définie par :

$$c = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Remarque. On vérifie que cette définition est indépendante :

- de l'abscisse curviligne s orientée positivement (car une autre abscisse serait $s + C$) ;
- de la fonction angulaire α choisie (car une autre fonction angulaire serait $\alpha + 2k\pi$).

Interprétation géométrique. La courbure permet de mesurer le caractère plus ou moins « courbe » de l'arc en un point : plus $\overrightarrow{T}$ tourne vite au voisinage de $M(s)$, plus la courbure est grande.

Arc paramétré de courbure nulle ou constante.

- Supposons que $c = 0$, soit $\frac{d\alpha}{ds} = 0$. Donc α est constant égal à α_0. Ainsi on a :

  $$\frac{\overrightarrow{dM}}{ds}(s) = \overrightarrow{T}(s) = \cos(\alpha_0)\,\overrightarrow{i} + \sin(\alpha_0)\,\overrightarrow{j}.$$

  On obtient :

  $$M(s) = \cos(\alpha_0)(s - s_0)\,\overrightarrow{i} + \sin(\alpha_0)(s - s_0)\,\overrightarrow{j} + M(s_0).$$

  Ainsi le support est inclus dans la droite passant par $M(z_0)$ et dirigée par le vecteur $\cos(\alpha_0)(s - s_0)\,\overrightarrow{i} + \sin(\alpha_0)(s - s_0)\,\overrightarrow{j}$. Inversement , si le support d'un arc est inclus dans une droite, sa courbure est nulle.

- On suppose que la courbure constante et non nulle $c = c_0$. Alors $\alpha(s) = c_0(s - s_0)$ et on obtient dans ce cas :
$$\frac{d\overrightarrow{M}}{ds}(s) = \overrightarrow{T}(s) = \cos(c_0(s - s_0))\overrightarrow{i} + \sin(c_0(s - s_0))\overrightarrow{j}.$$
D'où :
$$M(s) = \frac{1}{c_0}(\sin(c_0(s - s_0))\overrightarrow{i} - \cos(c_0(s - s_0))\overrightarrow{j}) + M(s_0).$$
Ainsi le support est inclus dans le cercle de centre $M(s_0)$ et de rayon $\frac{1}{|c_0|}$. Inversement, si le support d'un arc est inclus dans un cercle, sa courbure est constante.

Propriété 4

On a :
$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = c\overrightarrow{N} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -c\overrightarrow{T}.$$
En particulier, on a :
$$\frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \overrightarrow{T} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2} = c\overrightarrow{N}.$$

Preuve. On a :
$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{T}}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{ds} = \overrightarrow{N}c.$$
On procède de même pour $\overrightarrow{N}$. □

Propriété 5 (Vecteurs dérivée et accélération)

On a :
$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{T} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{T} + c\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\overrightarrow{N}.$$
En désignant par $v = \dfrac{ds}{dt} = \left\|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right\|$ la vitesse numérique de M, ces formules se réécrivent :
$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = v\overrightarrow{T} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + cv^2\overrightarrow{N}.$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème de dérivation des fonctions composées :
$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds} \times \frac{ds}{dt} = \overrightarrow{T} \times v$$
et :
$$\frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + v^2c\overrightarrow{N}.$$
□

Formules. Pour le calcul de la courbure, on ne peut pas utiliser directement la définition $\dfrac{d\alpha}{ds}$ car on n'a pas en général d'expression analytique de α en fonction de s. On pourra cependant procéder comme suit.

- En coordonnées cartésiennes, on a :
$$\alpha(t) = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T}}) = (\widehat{\overrightarrow{i}, \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}})$$

et :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j}.$$

On a donc (l'une au moins de ces expressions étant définies car l'arc est régulier) :

$$\tan(\alpha(t)) = \frac{y'}{x'} \quad \text{ou} \quad \text{cotan}(\alpha(t)) = \frac{x'}{y'}.$$

On obtient par exemple en dérivant la première expression :

$$\frac{d\alpha}{dt}(t)(1+\tan^2(\alpha(t))) = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\alpha}{dt}(t) = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{\det\left(\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}, \dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}\right)}{\left\|\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|^2}.$$

Enfin, on a :

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = \frac{d\alpha}{ds}(t) \times \frac{ds}{dt}(t) = c(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

On en déduit :

$$\boxed{c(t) = \frac{\det\left(\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}, \dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}\right)}{\left\|\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|^3}}.$$

- En coordonnées polaires, on a :

$$\alpha(\theta) = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T}(\theta)}) = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u(\theta)}}) + (\widehat{\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{T}(\theta)}) = \theta + (\widehat{\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{T}(\theta)}).$$

Notons $V(\theta) = (\widehat{\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{T}(\theta)})$. On a :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = r'(\theta)u(\theta) + r(\theta)v(\theta).$$

D'où (et là-aussi, l'une au moins de ces quantités est bien définie) :

$$\tan(V(\theta)) = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)} \quad \text{ou} \quad \text{cotan}(V(\theta)) = \frac{r'(\theta)}{r(\theta)}.$$

On obtient en dérivant :

$$\frac{dV}{d\theta}(\theta)\left(1 + \frac{r^2}{r'^2}\right) = \frac{r'^2 - rr''}{r'^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{d\theta}(\theta) = \frac{r'^2 - rr''}{r'^2 + r^2}.$$

et donc :

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta} = \frac{2r' + r^2 - rr''}{r'^2 + r^2}.$$

Enfin, on a :

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{d\alpha}{ds} \times \frac{ds}{d\theta} = c(\theta) \times \frac{1}{(r^2 + r'^2)^{1/2}},$$

et donc :

$$\boxed{c(\theta) = \frac{2r' + r^2 - rr''}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}}.$$

2.5 Rayon et centre de courbure

Soit toujours (I, M) un arc plan **régulier** de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geq 2$.

Définition.

- L'arc (I, M) est dit *birégulier en* $M(t)$ si $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}(t)$ sont linéairement indépendants.
- L'arc (I, M) est dit *birégulier* s'il est birégulier en chacun de ses points.

Propriété 6

L'arc (I, M) est birégulier en $M(t)$ si et seulement si $c(t) \neq 0$.

Preuve. On a avec les formules obtenues des vecteurs dérivée et accélération :

$$\det\left(\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t), \frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}(t)\right) = \det\left(v(t)\overrightarrow{T}, c(t)v(t)^2\overrightarrow{N} + \frac{dv}{dt}(t)\overrightarrow{T}\right) = c(t)v(t)^2.$$

L'arc étant régulier, on a $v(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Ainsi l'arc est birégulier en $M(t)$ si et seulement si $c(t) \neq 0$.
□

Définition.

Soit (I, M) un arc birégulier. On appelle :

- *fonction rayon de courbure* la fonction $R = \dfrac{1}{c}$,
- *fonction centre de courbure* la fonction $\Omega = M + R\overrightarrow{N}$,
- *cercle de courbure en* $M(t)$ le cercle de centre $\Omega(t)$ et de rayon $|R(t)|$.

Remarque. On a :

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = v\overrightarrow{T} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{N}.$$

Propriété 7 (*Le cercle de courbure est osculateur à l'arc*)

Soit (I, M) un arc birégulier. Le cercle de courbure en un point $M_0 = M(t_0)$ est la position limite du cercle tangent à l'arc en $M(t_0)$ et passant par le point $M(t)$ lorsque t tend vers t_0.

Preuve. Paramétrons l'arc par l'abscisse curviligne s orienté positivement, dont l'origine est au point considéré M_0, qui devient donc le point $M(0)$ d'abscisse curviligne $s = 0$. Dans le repère de Frenet $(M_0, \overrightarrow{T_0}, \overrightarrow{N_0})$ avec $\overrightarrow{T_0} =, \overrightarrow{T}(0)$ et $\overrightarrow{N_0} =, \overrightarrow{N}(0)$, on a par la formule de Taylor-Young :

$$\overrightarrow{M_0M}(s) = \overrightarrow{M_0M}(0) + s\frac{d\overrightarrow{M}}{ds}(0) + \frac{s^2}{2}\frac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2}(0) + s^2\overrightarrow{\varepsilon(s)} = s\overrightarrow{T_0} + \frac{s^2}{2}c_0\overrightarrow{N_0} + s^2\overrightarrow{\varepsilon(s)}.$$

Comme la courbure $c_0 = c(0)$ est non nulle (car l'arc est birégulier), on obtient que :

$$x(s) = s + s^2\varepsilon_x(s) \underset{0}{\sim} s \quad \text{et} \quad y(s) = \frac{c_0 s^2}{2} + s^2\varepsilon_y(s) \underset{0}{\sim} \frac{c_0 s^2}{2}.$$

Puisque la tangente en M_0 est l'axe (Ox), tout cercle tangent à l'arc en M_0 est centré sur (Oy) et a pour équation :

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0$$

où λ est l'ordonnée du centre. Un tel cercle passe par $M(s)$ si et seulement si :

$$x(s)^2 + y(s)^2 - 2\lambda y(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{x(s)^2 + y(z)^2}{y(s)} \underset{0}{\sim} \frac{s^2}{c_0 s^2/2} = \frac{2}{c_0} = 2R_0.$$

Ainsi le cercle tangent à l'arc en M_0 et passant par le point $M(s)$ a pour limite quand $s \to 0$ le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2R_0 y = x^2 + (y - R_0)^2 = 0$$

qui est précisément l'équation du cercle de courbure à l'arc en M_0. □

Définition.

On appelle *développée d'un arc plan birégulier* $t \in I \mapsto M(t)$ l'arc $t \in I \mapsto \Omega(t)$ défini par $\Omega(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t)$.
Le support de cette développée est l'ensemble des centres de courbure à l'arc initial.

Propriété 8 (*Tangente à la développée*)

Pour (I, M) un arc birégulier, la tangente à sa développée en un point régulier $\Omega(t)$ est la normale en $M(t)$.

Preuve. On paramétrise par l'abscisse curviligne. On a :

$$\frac{\overrightarrow{d\Omega}}{ds} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds} + \frac{dR}{ds}\overrightarrow{N} + R\frac{\overrightarrow{dN}}{ds} = \overrightarrow{T} + \frac{dR}{ds}\overrightarrow{N} - \frac{R}{c}\overrightarrow{T} = \frac{dR}{ds}\overrightarrow{N}.$$

Donc tangente et normale ont la même direction, et elles passent toutes les deux par $\Omega(s)$. D'où le résultat. □

2.6 Exemples.

Exercice. On considère toujours la cycloïde $t \mapsto M(t) = (R(t - \sin(t)), R(1 - \cos(t)))$.

1. Déterminer le repère de Frenet, la mesure α de $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T}})$ et le rayon de courbure $R(\cdot)$.
2. Déterminer sa développée, et montrer qu'il s'agit d'une cycloïde déduite de la précédente par translation.

1. On obtient par dérivation :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = R(1 - \cos(t))\overrightarrow{i} + R\sin(t)\overrightarrow{j} = 2R\sin(t/2)\left(sin(t/2)\overrightarrow{i} + \cos(t/2)\overrightarrow{j}\right).$$

On en déduit que $\frac{ds}{dt}(t) = \left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)\right\| = 2R\sin(t/2)$ pour $0 < t < 2\pi$, puis la base de Frenet :

$$\overrightarrow{T}(t) = sin(t/2)\overrightarrow{i} + \cos(t/2)\overrightarrow{j} = cos(\pi/2 - t/2)\overrightarrow{i} + \sin(\pi/2 - t/2)\overrightarrow{j},$$
$$\overrightarrow{N}(t) = -\cos(t/2)\overrightarrow{i} + sin(t/2)\overrightarrow{j}$$

On en tire $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$, et par dérivation :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{d\alpha}{dt}(t) = \frac{ds}{dt}(t)\frac{d\alpha}{ds}(t) = 2R\sin(t/2)c(t).$$

On en déduit la courbure $c(t)$ et le rayon de courbure $R(t) = -4R\sin(t/2)$.

2. On obtient :

$$\overrightarrow{O\Omega}(t) = \overrightarrow{OM}(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t) = R(1 + \sin(t))\overrightarrow{i} - R(1 - \cos(t))\overrightarrow{j}.$$

(Pour $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, on pourra prolonger cet arc Ω en posant $\Omega(2k\pi) = M(2k\pi)$).

Les coordonnées du centre de courbure Ω sont donc :

$$x_\Omega(t) = R(t + \sin(t)) \quad ; \quad y_\Omega(t) = -R(1 - \cos(t)).$$

Le changement de paramètre admissible $u = t - \pi$ les transforme comme suit :

$$x_\Omega(u) = R(u - \sin(u)) + R\pi \quad ; \quad y_\Omega(u) = R(1 - \cos(u)) - 2R.$$

Ainsi la développée de la cycloïde est la même cycloïde translatée de $\overrightarrow{V}(R\pi, -2R)$.

Exercice. On considère toujours la cardioïde d'équation polaire $r = a(1 - \cos(\theta))$.

1. Déterminer le repère de Frenet, la mesure α de $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T}})$ et le rayon de courbure $R(\cdot)$.
2. Déterminer sa développée, et montrer qu'il s'agit d'une cardioïde déduite de la précédente par similitude.

1. On a pour tout $0 < \theta < 2\pi$:
$$\frac{ds}{d\theta}(\theta) = \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) \right\| = 2a\sin(\theta/2).$$
La base de Frenet est donnée par :
$$\overrightarrow{T}(\theta) = \frac{1}{\left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) \right\|} \frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = \cos(\theta/2)\overrightarrow{u}(\theta) + \sin(\theta/2)\overrightarrow{v}(\theta) = \cos(3\theta/2)\overrightarrow{i} + \sin(3\theta/2)\overrightarrow{j}$$
et
$$\overrightarrow{N}(\theta) = -\sin(\theta/2)\overrightarrow{u}(\theta) + \cos(\theta/2)\overrightarrow{v}(\theta) = -\sin(3\theta/2)\overrightarrow{i} + \cos(3\theta/2)\overrightarrow{j}.$$
On en déduit que $\alpha(\theta) = \frac{3\theta}{2}$, d'où :
$$\frac{3}{2} = \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{d\alpha}{ds} \times \frac{ds}{d\theta} = c(\theta) \times 2a\sin(\theta/2)$$
et :
$$R(\theta) = \frac{1}{c(\theta)} = \frac{4}{3}a\sin(\theta/2).$$
2. On obtient enfin le centre de courbure $\Omega = M + R\overrightarrow{N}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:
$$x_\Omega(\theta) = a(1 - \cos(\theta)\cos(\theta) - \frac{4}{3}a\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2) = \frac{a}{3}(1 + \cos(\theta))\cos(\theta) - \frac{2a}{3},$$
$$y_\Omega(\theta) = a(1 - \cos(\theta)\sin(\theta) + \frac{4}{3}a\sin(\theta/2)\cos(3\theta/2) = \frac{a}{3}(1 + \cos(\theta))\sin(\theta).$$
Portant l'origine en $(-\frac{2a}{3}, 0)$, la développée a ainsi pour équation $r = \frac{a}{3}(1 + \cos(\theta))$, ou $r = \frac{a}{3}(1 - \cos(\theta))$ en changeant θ en $\theta + \pi$, donc ne changeant l'orientation de (Ox). Cette cardioïde se déduit de la première par homothétie de rapport $-1/3$ et translation.

3 Pour la préparation de la leçon 262

3.1 Conseils

Le contenu de la leçon 262 correspond essentiellement à la section 2 de ce cours. Pour gagner un peu de temps lors de la présentation de la leçon, on peut mettre les changements de paramètres admissibles dans les pré-requis de la leçon. On peut aussi éventuellement la compléter avec les points suivants :

★ Enveloppe d'une famille de droites, la développée est l'enveloppe de la famille des droites normales à cet arc.

★ Développante.

★★ Inégalité isopérimétrique.

L'ensemble de ce cours a été préparé avec l'aide de [1] pour pratiquement unique référence ([3] p.336 seulement pour la relation d'équivalence $\sim$ sur les arcs paramétrés et la notion d'arc géométrique). La leçon 262 est donc aisée à préparer, dans le sens où il n'y a pas besoin de naviguer sur plusieurs livres pour construire sa leçon. Il manque dans mon cours des dessins, il faudra absolument en faire lors de la présentation (lignes polygonales, repère de Frenet, courbure, ...).

Pour le développement, plusieurs choix sont possibles :

- calcul de la courbure en coordonnées cartésiennes (dans [1]) : le plus facile mais peut-être un peu léger ;
- le cercle de courbure est osculateur à l'arc, qu'on peut éventuellement associé à la démonstration de la propriété 4 (dans [1]) : c'est celui que je privilégierais ;
- l'inégalité isopérimétrique (dans [4]) : intéressant, mais à bien maitriser !

3.2 Pour s'entrainer

Quelques exercices afin d'être au point si vous présentez cette leçon :

- Rayon de courbure d'une ellipse, [2] p. 266 ;
- Pendule cycloïdal de Huygens, [1] p.363 ;
- Tractrice, [1] p.366.

Vous en trouverez beaucoup d'autres dans n'importe quel livre de classes préparatoires d'avant la réforme de 2013.

Bibliographie

[1] G. Debeaumarché. Manuel de Mathématiques volume 1. Analyse et géométrie différentielle. 1^{re} année de prépas scientifiques.

[2] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. Oraux X-ENS. Algèbre 3.

[3] X. Gourdon. Les maths en tête. Analyse.

[4] Ziuly, Queffélec. Analyse pour l'agrégation.