Cours

Introduction à la géométrie affine

Mathieu Mansuy

Préparation à l'Agrégation Interne de Mathématiques, Université de Franche Comté

Page personnelle : `http://mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mansuy.mathieu@hotmail.fr`

Introduction

Ces notes présentent les bases de la géométrie affine générale et a pour objectif de couvrir le programme de l'agrégation interne sur ce sujet. Un espace affine est un ensemble de points, il contient des droites, des plans, et la géométrie affine discute, par exemple, des relations entre ces points et ces droites : points alignés, droites parallèles ou concourantes, ... mais pas de distance, d'angle ou de perpendiculaires, ceux-ci relevant de la géométrie euclidienne que nous n'aborderons pas dans ce cours.

Pour définir ces objets et décrire leurs relations, on peut :

- énoncer une liste d'axiomes, d'incidence principalement, comme « par deux points distincts passe une droite et une seule ». C'est la voie d'Euclide dans ses *Éléments*. Même si la démarche et *a fortiori* les axiomes eux-mêmes n'y sont pas explicités, c'est cette méthode qui est utilisée actuellement dans l'enseignement secondaire.

- décider que l'essentiel est que deux points déterminent un *vecteur* et tout définir à l'aide de l'algèbre linéaire, c'est-à-dire par les axiomes définissant les espaces vectoriels.

Nous développons ici la deuxième méthode, dans l'esprit du programme de l'agrégation interne.

1 Espace affine

$\overrightarrow{E}$ désignera un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des réels, de dimension finie n.

1.1 Définition

Définition.

Une structure d'*espace affine de direction* $\overrightarrow{E}$ sur un ensemble E est la donnée d'une application $\varphi : E \times E \to \overrightarrow{E}$ vérifiant les deux axiomes :

(A1) Pour tout $(A, B, C) \in E^3$, $\quad \varphi(A, C) = \varphi(A, B) + \varphi(B, C)$,

(A2) Pour tout $A \in E$, l'application $\varphi_A : B \mapsto \varphi(A, B)$ est une bijection de E dans $\overrightarrow{E}$. En d'autres termes :

$$\forall A \in E, \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}, \exists! B \in E, \quad \overrightarrow{u} = \varphi(A, B).$$

Vocabulaire. Les éléments de E sont appelés des *points*, ceux de $\mathbb{R}$ des *scalaires*.

Notation.

- Pour tout couple $(A, B) \in E \times E$, on notera plus conventionnellement $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $\varphi(A, B)$. La relation de Chasles (A1) s'écrit alors de manière plus habituelle :

$$\forall (A, B, C) \in E^3, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

- Si $A \in E$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, l'unique $B \in E$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ sera également noté $B = A + \overrightarrow{u}$ (dans cet ordre - *notation de Grassmann*). La relation de Chasles (A1) se traduit avec cette notation par :

$$(A + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = A + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}). \tag{C}$$

On a également que $A + \overrightarrow{u} = A + \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

Mise en garde.

Le symbole + n'a pas la même signification dans (C) selon qu'il soit entre un point et un vecteur, ou entre deux vecteurs. + désigne la loi de composition interne de $\overrightarrow{E}$ associée à sa structure d'espace vectoriel. L'opération + entre un point et un vecteur (dans cet ordre) peut être vu comme une loi de composition externe de $E \times \overrightarrow{E}$ dans E.

Pour aller plus loin.

Cette définition peut être reformulée à l'aide du vocabulaire des groupes opérants sur un ensemble de la manière suivante : un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$ est la donnée d'un ensemble E sur lequel le groupe $(\overrightarrow{E}, +)$ opère à droite librement et transitivement.

De manière équivalente (puisque le groupe $(\overrightarrow{E}, +)$ est abélien), il s'agit de la donnée d'un ensemble E et d'une action à droite de $(\overrightarrow{E}, +)$ sur E qui soit fidèle et transitive.

Exemple fondamental. Tout espace vectoriel V peut être muni d'une *structure canonique d'espace affine* de direction lui-même en associant à chaque couple $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in V \times V$ de points de V le vecteur $\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}$ (autrement dit, $\overrightarrow{\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y}} = \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}$).

Propriété 1 (Produit cartésien d'espaces affines)

Soient E, F des espaces affines de direction $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ respectivement. Alors le produit cartésien $E \times F$ est naturellement muni d'une structure d'espace affine de direction $\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{F}$.

Preuve. On vérifie que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} (E \times F) \times (E \times F) & \to & \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{F} \\ ((A, A'), (B, B')) & \mapsto & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \end{array}$$

vérifie les deux axiomes définissant un espace affine. □

Définition.

Soit E un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$. On dit que E est de *dimension finie* lorsque $\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel de dimension finie. On appelle *dimension de* E la dimension de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$.

Terminologie. Les espaces affines de dimension 1 sont appelés *droites*, ceux de dimension 2 sont appelés *plans*.

Remarque. Un espace affine E est de dimension 0 (i.e. associé à $\overrightarrow{E} = \{\overrightarrow{0}\}$) si et seulement s'il est réduit à un point.

1.2 Premières propriétés

Propriété 2

(1) Pour tout $A \in E$, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

(2) Pour tout $A, B \in E$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

(3) Pour tout $A, B, C \in E$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B = C$.

(4) Pour tout $A, B, C, D \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, (ii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, (iii) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Si l'une de ces conditions est réalisée, on dit que A, B, C, D forment (dans cet ordre) le *parallélogramme* $ABCD$.

Preuve.

(1) Par la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AA}.$$

(2) Toujours par la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

(3) On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ si et seulement si $\varphi_A(B) = \varphi_A(C)$, d'où par injectivité de φ_A si et seulement si $B = C$.

(4) Laissé en exercice.

□

1.3 Vectorialisé d'un espace affine

Un espace vectoriel est un ensemble dans lequel l'élément $\{\overrightarrow{0}\}$ joue un rôle particulier. Ce n'est pas le cas dans un espace affine, où aucun point n'est a priori privilégié. Mais si l'on se donne à présent un point A de E que l'on va prendre comme « origine », on dispose d'après (A2) d'une bijection ensembliste :

$$\varphi_A : B \in E \mapsto \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{E}.$$

Cette bijection permet de « transporter » sur E la structure d'espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ en définissant pour tout $B, C \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les lois $+_A$ et $\cdot_A$ par :

$$B +_A C = \varphi_A^{-1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot_A B = \varphi_A^{-1}(\lambda \cdot \overrightarrow{AB}).$$

Propriété 3

- $(E_A, +_A, \cdot_A)$ est un espace vectoriel, appelé le *vectorialisé* de E (par le point A). De plus, on a $\overrightarrow{0_{E_A}} = A$.
- φ_A est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E_A sur $\overrightarrow{E}$. En particulier, on a $\dim(E_A) = \dim(\overrightarrow{E})$.

Preuve. On vérifie (en exercice si nécessaire) que $(E_A, +_A, \cdot_A)$ satisfait les axiomes définissant un espace vectoriel, et on a pour tout $B \in E_A$:

$$A +_A B = \varphi^{-1}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}) = \varphi^{-1}(\overrightarrow{AB}) = B.$$

On a donc $\overrightarrow{0_{E_A}} = A$. D'autre part, on a pour tout $B, C \in E_A$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi_A(B +_A C) = \varphi_A \circ \varphi_A^{-1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \varphi_A(\lambda \cdot_A B) = \varphi \circ \varphi_A^{-1}(\lambda \cdot \overrightarrow{AB}) = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Donc φ_A est une application linéaire de $(E_A, +_A, \cdot_A)$ dans $\overrightarrow{E}$, bijective d'après (A2). C'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels de E_A dans $\overrightarrow{E}$. □

Mise en garde.

Le procédé de vectorialisation d'un espace affine n'est pas canonique : les lois ne sont pas les mêmes dans E_A et E_B si $A \neq B$. Par exemple, le vecteur nul dans E_A est A, alors que c'est B dans E_B.

1.4 Repère cartésien, orientation, volume algébrique

Repère cartésien

Définition.

On appelle *repère cartésien* de l'espace affine E tout couple $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$, où O est un point de E, et $\mathscr{B}$ est une base de $\overrightarrow{E}$. On dit alors que O est *l'origine* du repère $\mathscr{R}$ et que $\mathscr{B}$ est la base associée au repère $\mathscr{R}$.

On appelle *coordonnées cartésiennes* d'un point M dans un repère $\mathscr{R}$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Propriété 4 (Formules de changement de repères)

Soient $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ et $\mathscr{R}' = (O', \mathscr{B}')$ deux repères cartésiens de E, et soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Si $M \in E$, on note X_M (resp. X'_M la matrice colonne des coordonnées de M dans $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}'$). Alors pour tout $M \in E$, on a :

$$X_M = PX'_M + X_{O'}.$$

Preuve. Observons que $X_M - X_{O'}$ représente la matrice colonne des composantes du vecteur $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O'M}$ dans la base $\mathscr{B}$. Comme X'_M n'est autre que la matrice colonne des composantes de $\overrightarrow{O'M}$ dans la base $\mathscr{B}'$, la formule résulte donc du cours d'algèbre linéaire. □

Orientation

Définition.

Soient $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{B})$ et $\mathscr{R}' = (O', \overrightarrow{B}')$ deux repères cartésiens d'un espace affine E, et notons $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

On dit que $\mathscr{R}$ est de même orientation que $\mathscr{R}'$ si $\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) > 0$.

Propriété 5

La relation binaire « avoir la même orientation que » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des repères cartésiens de E. Pour cette relation d'équivalence, il existe deux classes d'équivalence.

Preuve. Montrons que c'est une relation d'équivalence.

- **Réflexivité.** Pour tout repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$, la matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}$ n'est autre que I_n, de déterminant $1 > 0$. Donc $\mathscr{R}$ a la même orientation que lui-même.
- **Symétrie.** Soit $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ et $\mathscr{R}' = (O', \mathscr{B}')$ deux repères. Supposons que $\mathscr{R}$ soit de même orientation que $\mathscr{R}'$, soit que $\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) > 0$. Alors on a :

$$\det(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}) = \det(P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) = \frac{1}{\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})} > 0,$$

  et $\mathscr{R}'$ est de même orientation que $\mathscr{R}$.
- **Transitivité.** Supposons que le repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ est de même orientation que le repère $\mathscr{R}' = (O', \mathscr{B}')$, lui-même de même orientation que le repère $\mathscr{R}'' = (O'', \mathscr{B}'')$. Montrons que $\mathscr{R}$ est de même orientation que $\mathscr{R}''$. On a $\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) > 0$ et $\det(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}) > 0$, et :

$$\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}) = \det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}) = \underbrace{\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})}_{>0}\underbrace{\det(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''})}_{>0} > 0.$$

  Donc $\mathscr{R}$ a même orientation que $\mathscr{R}''$.

Soit $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ un repère de E. Le repère $\mathscr{R}' = (O, \mathscr{B}' = (-\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ n'est pas de même orientation que $\mathscr{R}$ car :

$$\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) = \det(\mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)) = -1.$$

Il existe donc au moins deux classes d'équivalence de repères. Et pour tout repère $\mathscr{R}'' = (O'', \mathscr{B}'')$, on a deux cas possibles :

- soit $\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}) > 0$, et $\mathscr{R}''$ est de même orientation que $\mathscr{R}$.
- soit $\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}) < 0$, et dans ce cas, on a :

$$\det(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}) = \det(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}})\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}) = -\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}) > 0,$$

  et $\mathscr{R}''$ est de même orientation que $\mathscr{R}'$.

Il existe donc exactement deux classes d'équivalence de repères. □

Définition.

On dit que l'on *oriente* E lorsqu'on choisit l'une des deux classes d'équivalence précédentes. Il suffit pour cela de donner un repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ de cette classe. Les repères de la classe choisie sont dits *directs*, les autres sont dits *indirects*.

Volume algébrique

2 Sous-espace affine

2.1 Définition et exemples

Définition.

Soit E un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$. Une partie non vide F de E est un *sous-espace affine* s'il existe un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ de $\overrightarrow{E}$ et un point A de E tel que :

$$F = A + \overrightarrow{F} = \{A + \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}\} = \{M \in E,\ \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{F}\}.$$

Propriété 6

(1) Pour tout $B \in E$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $B \in F$, (ii) $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F}$, (iii) $F = B + \overrightarrow{F}$.

(2) $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AM},\ M \in F\} = \{\overrightarrow{MN},\ M, N \in F\}$.

Preuve.

(1) Montrons l'équivalence entre ces trois assertions.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si $B \in F = A + \overrightarrow{F}$, alors il existe $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ tel que $B = A + \overrightarrow{u}$, soit encore $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons que $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F}$, et montrons que $F = B + \overrightarrow{F}$.

$\supset$ Pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$, on a :

$$B + \overrightarrow{u} = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{u} = A + \underbrace{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u})}_{\in \overrightarrow{F}} \in A + \overrightarrow{F} = F.$$

$\subset$ Soit $C \in F = A + \overrightarrow{F}$: il existe $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ tel que $C = A + \overrightarrow{u}$. Montrons que $C \in B + \overrightarrow{F}$. On a :

$$C = A + \overrightarrow{u} = (B + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{u} = B + \underbrace{(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u})}_{\in \overrightarrow{F}} \in B + \overrightarrow{F}.$$

D'où l'égalité $F = B + \overrightarrow{F}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supposons $F = B + \overrightarrow{F}$. On a :

$$B = B + \overrightarrow{BB} = B + \overrightarrow{0} \in B + \overrightarrow{F} = F.$$

(2) Montrons que $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AM},\ M \in F\}$. Soit pour cela $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. On a :

$$\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F} \ \Leftrightarrow\ A + \overrightarrow{u} \in A + \overrightarrow{F} = F \ \Leftrightarrow\ \exists M \in F,\ A + \overrightarrow{u} = M \ \Leftrightarrow\ \exists M \in F,\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}.$$

Montrons à présent l'égalité $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{MN},\ M, N \in F\}$. L'inclusion $\subset$ est direct avec l'égalité précédemment obtenue. Réciproquement, soit $M, N \in F$. On a $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN} \in \overrightarrow{F}$, de sorte que :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \in \overrightarrow{F}$$

car $\overrightarrow{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$.

□

Corollaire 7

Soit $F = A + \overrightarrow{F}$ un sous-espace affine de E.

(1) Le sous-espace $\overrightarrow{F}$ est indépendant de A.

(2) F est naturellement muni d'une structure d'espace affine, pour laquelle sa direction n'est autre que $\overrightarrow{F}$.

(3) F est l'unique sous-espace affine de E passant par A et de direction $\overrightarrow{F}$.

Preuve.

(1) Résulte de la propriété précédente, puisque $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{MN},\ M, N \in F\}$.

(2) Considérons l'application $\varphi : (M, N) \in F \times F \mapsto \overrightarrow{MN} \in \overrightarrow{F}$. Cette application est bien définie en vertu du (2) de la propriété précédente, et vérifie l'axiome (A1) puisque $F \subset E$ et $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{E}$. Pour tout $B \in F$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$, il existe $C \in F$ tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{u}$ d'après le point (1) de la propriété précédente. D'après l'axiome (A2) dans E, ce point C est de plus unique. Ainsi F est bien muni d'une structure d'espace affine de direction $\overrightarrow{F}$.

(3) Soit G un sous-espace affine passant par A et de direction $\overrightarrow{F}$. Puisque $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{F}$, il existe $B \in E$ tel que $G = B + \overrightarrow{F}$. Et puisque $A \in G$, le point (1) de la propriété précédente montre que $G = A + \overrightarrow{F} = F$.

□

Définition.

On appelle *dimension de F* (resp. *codimension de F*) la dimension de $\overrightarrow{F}$ (resp. la codimension de $\overrightarrow{F}$) dans $\overrightarrow{E}$.

Si $\dim(F) = 1$, on dit que F est une *droite de E*. Si $\dim(F) = 2$, on dit que F est un *plan de E*. Et si $\operatorname{codim}(F) = 1$, on dit que F est un *hyperplan de E*.

Propriété 8

Soient E et F des espaces vectoriels, $f : E \to F$ une application linéaire et $b \in F$. Considérons l'*équation linéaire* :

$$f(x) = b. \tag{E}$$

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de cette équation est non vide si et seulement si $b \in \operatorname{Im}(f)$.

S'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = b$, alors $\mathscr{S}$ est le sous-espace affine de E passant par la solution particulière x_0 de (E) et de direction $\operatorname{Ker}(f)$, l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre, soit :

$$\mathscr{S} = x_0 + \operatorname{Ker}(f).$$

Preuve. Le premier point est évident. Supposons qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = b$. Alors on a :

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{S} \Leftrightarrow f(x) = b = f(x_0) \ &\Leftrightarrow\ f(x) - f(x_0) = 0 \ \Leftrightarrow\ f(x - x_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - x_0 \in \operatorname{Ker}(f) \ \Leftrightarrow\ x \in x_0 + \operatorname{Ker}(f). \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\mathscr{S} = x_0 + \mathrm{Ker}(f)$, et $\mathscr{S}$ apparait comme le sous-espace affine de E passant par x_0 et de direction $\mathrm{Ker}(f)$. □

Conséquences.

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire, s'il n'est pas vide, est un sous-espace affine dirigé par l'ensemble des solutions du système sans second membre associé.
- Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre p :
$$a_p(t)y^{(p)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t), \tag{E}$$
où $a_0, a_1, \ldots, a_p, b : I \to \mathbb{R}$ sont supposées de classe $\mathscr{C}^0$ sur l'intervalle I. Cette équation différentielle peut être interprétée comme une équation linéaire :
$$f(y) = b \text{ avec } f : y \in \mathscr{C}^p(I, \mathbb{R}) \mapsto a_p y^{(p)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}).$$
Si (E) admet une solution particulière y_0, alors l'ensemble des solutions de (E) est le sous-espace affine de $\mathscr{C}^p(I, \mathbb{R})$ passant par y_0 et dirigé par $\mathrm{Ker}(f)$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (i.e. sans second membre) associée à (E).

Remarque. Plus généralement, les sous-espaces affine d'un espace vectoriel E sont les sous-espaces de la forme $x_0 + F$ où F est un sous-espace vectoriel de E et x_0 est un vecteur de E. Les sous-espaces vectoriels de E sont les sous-espaces affines passant par 0_E.

2.2 Représentation paramétrique et cartésienne d'un sous-espace affine

2.3 Intersection et inclusion de sous-espaces affines

Propriété 9

Soient F et G deux sous-espaces affines de E.

(1) Si $F \subset G$, alors $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$ et $\dim(F) \leq \dim(G)$.

(2) Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

(3) Si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$ et $F \cap G \neq \emptyset$, alors $F \subset G$.

Preuve.

(1) Si $F \subset G$, alors :
$$\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{MN},\ M, N \in F\} \subset \{\overrightarrow{MN},\ M, N \in G\} = \overrightarrow{G}.$$
On en déduit que $\dim(F) = \dim(\overrightarrow{F}) \leq \dim(\overrightarrow{G}) = \dim(G)$.

(2) Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors d'après le point précédente, on a $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$ et $\dim(\overrightarrow{F}) = \dim(\overrightarrow{G})$. On sait alors par l'algèbre linéaire que $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$. Pour tout $A \in F$, on a aussi $A \in G$ car $F \subset G$, et donc :
$$F = A + \overrightarrow{F} = A + \overrightarrow{G} = G.$$

(3) Soit $A \in F \cap G$. Alors on a :
$$F = \{A + \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}\} \subset \{A + \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{G}\} = G.$$

□

Propriété 10

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou non) de sous-espaces affines de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E, auquel cas on a $\overrightarrow{\bigcap_{i\in I} F_i} = \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{F_i}$.

Preuve. Supposons que $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$, et prenons A dans cette intersection. On a alors :

$$\begin{aligned} M \in \bigcap_{i\in I} F_i \ &\Leftrightarrow\ \forall i \in I,\ M \in F_i = A + \overrightarrow{F_i} \ \Leftrightarrow\ \forall i \in I,\ \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{F_i} \\ &\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AM} \in \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{F_i} \ \Leftrightarrow\ M \in A + \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{F_i}. \end{aligned}$$

Ainsi $\bigcap_{i\in I} F_i = A + \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{F_i}$, ce qui prouve que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace affine de direction $\bigcap_{i\in I} \overrightarrow{F_i}$. □

2.4 Sous-espace affine engendré par une partie

Propriété 11

Si X est une partie non vide de E, alors l'intersection des sous-espaces de E contenant X est un sous-espace affine de E, et c'est le plus petit sous-espace de E contenant X. On l'appelle le *sous-espace affine de E engendré par X* et on le note $\mathrm{Aff}(X)$.

Preuve. Notons $(F_i)_{i\in I}$ la famille des sous-espaces affines de E contenant X. Cette famille est non vide puisqu'elle contient E. Posons donc $F = \bigcap_{i\in I} F_i$. Comme F contient X et que $X \neq \emptyset$, on a $F \neq \emptyset$ et F est un sous-espace affine par la propriété précédente. Enfin, si G est un sous-espace de E contenant X, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $G = F_{i_0}$, de sorte que $F \subset G$. □

Propriété 12

Soit X une partie non vide de E.

(1) X est un sous-espace affine de E si et seulement si $\mathrm{Aff}(X) = X$.

(2) $X \subset Y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Aff}(X) \subset \mathrm{Aff}(Y)$

(3) Pour tout $A \in X$, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{Aff}(X)} = \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\}) = \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{MN},\ M, N \in X\}).$$

Preuve.

(1) Si X est un sous-espace affine, alors X est le plus petit sous-espace affine contenant X, de sorte que $X = \mathrm{Aff}(X)$. Réciproquement, si $X = \mathrm{Aff}(X)$, alors X est bien un sous-espace affine.

(2) Supposons que $X \subset Y$. Alors $\mathrm{Aff}(Y)$ est un sous-espace affine contenant Y, et donc X. Puisque $\mathrm{Aff}(X)$ est le plus petit sous-espace affine contenant X, on a $\mathrm{Aff}(X) \subset \mathrm{Aff}(Y)$.

(3) Soit $A \in X$ fixé. Montrons l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{Aff}(X)} = \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\})$.

- $\supset$ Pour tout $M \in X$, on a $A, M \in X \subset \mathrm{Aff}(X)$, et donc $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{\mathrm{Aff}(X)}$. Par conséquent, on a $\mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\}) \subset \overrightarrow{\mathrm{Aff}(X)}$.
- $\subset$ Le sous-espace affine $F = A + \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\})$ contient X, donc il contient $\mathrm{Aff}(X)$. En passant aux directions, on en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{Aff}(X)} \subset \overrightarrow{F} = \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\})$.

Montrons à présent que $\mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\}) = \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{MN},\ M, N \in X\})$. L'inclusion $\subset$ est évidente. Réciproquement, pour tout $M, N \in X$, on a :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \in \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\}).$$

Ainsi, on a bien $\mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{MN},\ M, N \in X\}) \subset \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\})$. D'où l'égalité.

□

Exemples.

- Si $A, B \in E$, $\mathrm{Aff}(A, B) = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB})$ est une droite, et c'est l'unique droite affine passant par A et B. On la note (AB).
- Si $A, B, C \in E$ sont non alignés (i.e. si $C \notin (AB)$), $\mathrm{Aff}(A, B, C) = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un plan affine, et c'est le seul passant par A, B, C. On le note (ABC).

2.5 Parallélisme

La notion de parallélisme entre sous-espaces est typique de la géométrie affine. Donnons-en sa signification.

Définition.

Deux sous-espaces affines F et G de E sont dits :

- *parallèles* si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$ ou $\overrightarrow{G} \subset \overrightarrow{F}$. On note alors $F \| G$.
- *strictement parallèles* si $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$.

Exemples.

- Tout point est parallèle à n'importe quel autre sous-espace.
- Si $f : E \to F$ est une application linéaire, tous les sous-espaces affines $f^{-1}(\{b\})$ (pour b dans l'image de f) sont strictement parallèles puisqu'ils sont tous dirigés par $\mathrm{Ker}(f)$.

Pour aller plus loin.

La relation de parallélisme strict est une relation d'équivalence entre les sous-espaces affines de même dimension p. Les classes d'équivalences sont paramétrées par les sous-espaces vectoriels de dimension p de $\overrightarrow{E}$. À l'inverse, le parallélisme n'est pas une relation d'équivalence.

Propriété 13

Soient F et G deux sous-espaces affines de E.

(1) Si F et G sont parallèles, alors $F \cap G = \emptyset$ ou $F \subset G$ ou $G \subset F$.

(2) Si F et G sont strictement parallèles, alors $F \cap G = \emptyset$ ou $F = G$.

Preuve.

(1) Soient F et G des sous-espaces parallèles, c'est-à-dire satisfaisant $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$ ou $\overrightarrow{G} \subset \overrightarrow{F}$. Si $F \cap G \neq \emptyset$, alors d'après le point (3) de la Propriété 9, on a $F \subset G$ ou $G \subset F$.

(2) Supposons F et G strictement parallèles, c'est-à-dire $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$. Si $F \cap G \neq \emptyset$ et si on note A un point dans cette intersection, alors F et G sont des sous-espaces de même direction passant par A. Ils sont donc égaux.

□

Exercice. Quatre points non alignés A, B, C, D forment un parallélogramme si et seulement si $(AB) \| (DC)$ et $(AD) \| (BC)$.

$\Rightarrow$ Si $ABCD$ est un parallélogramme non aplati, alors par définition $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. On en déduit que :

$$\overrightarrow{(AB)} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{(DC)}.$$

Ainsi $(AB) \| (DC)$, et on montre de même que $(AD) \| (BC)$.

$\Leftarrow$ Supposons que $(AB) \| (DC)$ et $(AD) \| (BC)$. Les points n'étant pas alignés, on a $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{DC})$ et $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AD}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{BC})$, de sorte qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{DC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} = \mu \overrightarrow{BC}.$$

On a donc :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (1-\lambda)\overrightarrow{CD} + (1-\mu)\overrightarrow{BC}.$$

Puisque B, C, D sont non alignés, les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont indépendants, de sorte que $\lambda = 1$ (et $\mu = 1$) et $ABCD$ est bien un parallélogramme.

Propriété 14 (*Cinquième postulat d'Euclide,* ou *postulat des parallèles*)

Si $A \in E$ et F est un sous-espace affine de E, alors il existe un unique sous-espace affine G de E qui passe par A et qui est strictement parallèle à F : il s'agit de $G = A + \overrightarrow{F}$.

Preuve. $G = A + \overrightarrow{F}$ est bien un sous-espace affine passant par A et strictement parallèle à F, et il est unique par unicité du sous-espace affine passant par A et de direction $\overrightarrow{F}$. □

Le saviez-vous ?

Le qualificatif de cette proposition vient du fait qu'on doit la prendre effectivement comme un postulat lorsqu'on veut définir la géométrie affine de manière axiomatique. Plus précisément, cet énoncé est le dernier des cinq axiomes qu'Euclide avait retenus pour définir la géométrie affine « euclidienne » plane dans ses *Éléments*, au IIIe siècle avant notre ère.

On a longtemps cru qu'on pourrait prouver ce cinquième axiome à partir des quatre premiers. Et ce n'est qu'au XIXe siècle que fut définitivement établie sa nécessité, lorsque certains mathématiciens démontrèrent qu'il était possible de construire des géométries (dites alors *non euclidiennes*) cohérentes en prenant sa négation. On peut construire ainsi deux autres types de géométries non euclidiennes :

- la *géométrie hyperbolique*, qui prend pour cinquième postulat que « par un point extérieur à une droite, on peut mener une infinité de droites qui lui sont parallèles » ;

- la *géométrie elliptique*, prenant pour cinquième postulat que « par un point extérieur à une droite, on ne peut mener aucune parallèle ».

2.6 Mesures algébriques et rapports de vecteurs

Définition.

Soit $\vec{i}$ un vecteur non nul de $\vec{E}$, et soit Δ une droite affine, $\vec{i}$ un vecteur directeur de Δ (i.e. tel que $\vec{\Delta} = \text{Vect}(\vec{i})$).

Si $A, B \in \Delta$, l'unique scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{i}$ s'appelle la *mesure algébrique de* $\overrightarrow{AB}$ *par rapport à* $\vec{i}$, et se note $\overline{AB}$.

Propriété 15

Soit Δ une droite de E munie d'une mesure algébrique définie par rapport à un vecteur directeur $\vec{i}$.

(1) Soit $O \in \Delta$. Dans le repère cartésien $\mathscr{R} = (O, \vec{i})$, on a $\overline{AB} = x_B - x_A$ pour tout $A, B \in \Delta$, où x_M désigne l'abscisse du point M dans le repère $\mathscr{R}$.

(2) Si $A, B, C \in \Delta$, $\overline{AB} = \overline{AC} \Leftrightarrow B = C$. En particulier, $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$.

(3) Si $A, B, C \in \Delta$, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. En particulier, $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

Preuve.

(1) On a $\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = x_B \vec{i}$ par définition de l'abscisse dans le repère $\mathscr{R}$. D'où par soustraction :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A)\vec{i}$$

de sorte que $\overline{AB} = x_B - x_A$.

(2) On a :

$$\overline{AB} = \overline{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i} = \overline{AC}\,\vec{i} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B = C.$$

Comme de plus $\overrightarrow{AA} = 0\,\vec{i}$, on a $\overline{AA} = 0$, et la deuxième équivalence en découle.

(3) On a :

$$\overline{AC}\,\vec{i} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overline{AB}\,\vec{i} + \overline{BC}\,\vec{i} = (\overline{AB} + \overline{BC})\,\vec{i}.$$

Puisque $\vec{i} \neq \vec{0}$, on a donc $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. En particulier lorsque $A = C$, on obtient :

$$0 = \overline{AA} = \overline{AB} + \overline{BA} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = -\overline{BA}.$$

□

Remarque. Soient $A \neq B$, et $\vec{i}$ un vecteur directeur de (AB). Soient également $C, D \in E$ tels que $\text{Aff}(C, D) \| (AB)$. Alors on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} = \overline{CD}\,\vec{i}$$

de sorte que :

$$\overrightarrow{CD} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\overrightarrow{AB}.$$

Ainsi, le rapport $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ apparait comme l'unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Cette quantité est donc indépendante du choix de $\overrightarrow{i}$, et il n'est nullement besoin d'un vecteur de référence pour la définir. Ceci motive la :

Définition.

Soient $A, B, C, D \in E$ tels que $A \neq B$ et $\mathrm{Aff}(C, D) \| (AB)$. On appelle *rapport (de colinéarité) de* $\overrightarrow{CD}$ *par* $\overrightarrow{AB}$ l'unique scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}$. On le note $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$.

Remarque. La notation $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ est utilisée pour être cohérente avec l'emploi éventuel de mesures algébriques, mais **les rapports de colinéarité des vecteurs existent indépendamment de la notion de mesure algébrique**. C'est d'ailleurs ce qui fait leur intérêt (pas besoin de fixer un vecteur directeur de référence), et sauf cas particulier il n'y a pas lieu d'interpréter un rapport de colinéarité comme un rapport de mesures algébriques.

On vérifie que les rapports de vecteurs ont des propriétés similaires à celles de mesures algébriques.

Propriété 16

Soients A, B, C, C', D, D', G, H des points de E, avec $A \neq B$.

(1) Si $C, D \in (AB)$, et si la droite (AB) est muni d'un repère cartésien $\mathscr{R}$, alors $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \dfrac{x_D - x_C}{x_B - x_A}$, où x_M désigne l'abscisse de M dans $\mathscr{R}$.

(2) Si C, C', D sont alignés sur une parallèle à (AB), alors $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CC'}}{\overline{AB}} + \dfrac{\overline{C'D}}{\overline{AB}}$. En particulier, on a $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{AB}}$.

(3) Si $C \neq D$, $(CD) \| (AB)$ et $\mathrm{Aff}(G, H) \| (AB)$, alors $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{GH}}{\overline{CD}} \cdot \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$. En particulier, on a $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \left(\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}\right)^{-1}$.

(4) Si C, D, D' sont alignés sur une parallèle à (AB), alors $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CD'}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow D = D'$.

Preuve. Analogue à la preuve de la propriété précédente. Laissée en exercice. □

Théorème 17 (de Thalès (env. 625 - 547 av. J.C.))

Soit ABB' un triangle non aplati et C, C' deux points distincts des précédents, situés respectivement sur les droites (AB) et (AB'). Les droites (BB') et (CC') sont parallèles si et seulement si on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}.$$

En outre, si ces conditions sont réalisées, on a : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}$.

Preuve. Puisque A, B, C et A, B', C' sont alignés, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \mu\overrightarrow{AB'}$. Maintenant, les droites (BB') et (CC') sont parallèles si et seulement s'il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{CC'} = \nu\overrightarrow{BB'}$. Ceci est équivalent à :

$$\mu\overrightarrow{AB'} - \lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC'} = \nu\overrightarrow{BB'} = \nu(\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB}),$$

et donc à l'égalité $(\lambda-\nu)\overrightarrow{AB} = (\mu-\nu)\overrightarrow{AB'}$. Compte-tenu de l'indépendance des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB'}$, c'est encore équivalent à $\lambda - \mu = \lambda - \nu = 0$, soit encore à $\lambda = \mu = \nu$ ce qui est l'égalité des trois rapports. □

3 Applications affines

3.1 Généralités

Définition

Définition.

Soient E et F deux espaces affines. Une application $f : E \mapsto F$ est une *application affine* (ou *morphisme affine*) s'il existe une application linéaire $\sigma : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ vérifiant :

$$\forall A, B \in E, \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = \sigma(\overrightarrow{AB})$$

ce qui se réécrit (avec les notations de Grassmann) :

$$\forall A \in E, \quad \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}, \quad f(A + \overrightarrow{u}) = f(A) + \sigma(\overrightarrow{u}).$$

Propriété 18

Pour une application affine $f : E \to F$ donnée, il n'existe qu'une seule application linéaire $\sigma : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ vérifiant la condition de la définition. On l'appelle la *partie linéaire de* f, et on la note $\overrightarrow{f}$.

Preuve. Supposons qu'on ait $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathscr{L}(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F})$ tels que :

$$\forall A, B \in E, \quad \sigma_1(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \sigma_2(\overrightarrow{AB}).$$

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, et fixons $A \in E$ un point quelconque. Par (A2), il existe un unique point $B \in E$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. On a alors :

$$\sigma_1(\overrightarrow{u}) = \sigma_1(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \sigma_2(\overrightarrow{AB}) = \sigma_2(\overrightarrow{u}).$$

Ainsi on a bien $\sigma_1 = \sigma_2$. □

Exemples.

- L'identité $\mathrm{id}_E : M \mapsto M$ est affine, de partie linéaire $\overrightarrow{\mathrm{id}_E} = \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$.
- Une application constante $f : M \in E \mapsto A \in F$ est affine, de partie linéaire $\overrightarrow{f} = 0_{\mathscr{L}(\overrightarrow{E})}$. Réciproquement, si f est affine, alors f est constante si et seulement si $\overrightarrow{f} = 0_{\mathscr{L}(\overrightarrow{E})}$.
- Les applications affines de $\mathbb{R}$ dans lui-même ($\mathbb{R}$ étant vu comme droite affine sur lui-même) sont exactement les applications de la forme $x \mapsto ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Caractérisation

Propriété 19

Soient E et F deux espaces affines, $\sigma : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ une application linéaire et $(A,B) \in E \times F$. Il existe une unique application affine f de E dans F telle que :

$$f(A) = B \quad \text{et} \quad \overrightarrow{f} = \sigma.$$

Autrement dit, une application affine est entièrement déterminée par la donnée de sa partie linéaire et de l'image d'un point (quelconque).

Preuve. L'application $f : M \in E \mapsto B + \sigma(\overrightarrow{AM}) \in F$ satisfait $f(A) = B$, et on a pour tout $M, N \in E$:

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{Bf(N)} - \overrightarrow{Bf(M)} = \sigma(\overrightarrow{AN}) - \sigma(\overrightarrow{AM}) = \sigma(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = \sigma(\overrightarrow{MN}).$$

Ainsi f est affine, et on a $\overrightarrow{f} = \sigma$.

Supposons à présent qu'il existe une application affine g possédant les mêmes propriétés. Alors on a pour tout $M \in E$:

$$g(M) = g(A + \overrightarrow{AM}) = g(A) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{AM}) = B + \sigma(\overrightarrow{AM}) = f(M),$$

de sorte que $g = f$. $\square$

Corollaire 20

Soient f et g deux applications affines d'un espace E dans F. Si $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ et s'il existe $A \in E$ tel que $f(A) = g(A)$, alors $f = g$.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Propriété 21

Soit f une application affine. Alors f est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si $\overrightarrow{f}$ l'est.

Preuve. Laissée en exercice. $\square$

Propriété 22

Soit f une application affine entre espaces **de même dimension**. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective, (ii) f est surjective, (iii) f est bijective.

Preuve. Laissée en exercice. $\square$

Définition.

- Une application affine de E dans E s'appelle un *endomorphisme affine de* E.
- Une application affine bijective s'appelle un *isomorphisme affine* (ou *transformation affine*).
- Un endomorphisme affine bijectif s'appelle un *automorphisme affine*.

Notation.

On notera :

- $A(E,F)$ l'ensemble des morphismes affines de E dans F,
- $A(E) = A(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes affines de E,
- $GA(E)$ l'ensemble des automorphismes affines de E,
- pour $f \in A(E)$:

$$\mathrm{Inv}(f) = \{M \in E,\ f(M) = M\} = \text{ ensemble des points fixes de } f.$$

Homothéties et translations

Définition.

Soit $A \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On appelle *homothétie de rapport* k *et de centre* A l'application notée $h_{A,k}$ définie par :

$$\forall M \in E, \quad h_{A,k}(M) = A + k\overrightarrow{AM}.$$

Remarque. Une homothétie $h_{A,1}$ de rapport 1 est l'identité (pour tout $A \in E$), une homothétie $h_{A,-1}$ de rapport -1 s'appelle *symétrie centrale de centre* A et se note s_A.

Propriété 23 (Caractérisation d'une homothétie par sa partie linéaire)

Les homothéties de rapport $k \notin \{0,1\}$ sont les applications affines dont la partie linéaire est $k\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$.
Lorsque $k \neq 1$, le centre A d'une homothétie est son unique point fixe.

Preuve. Soit f une homothétie de rapport $k \neq 0, 1$. Notons A son centre. Alors pour tout $M, N \in E$, on a :

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{Af(N)} - \overrightarrow{Af(M)} = k\overrightarrow{AN} - k\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MN}.$$

Ainsi f est affine et on a $\overrightarrow{f} = k\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$.

Réciproquement, soit f une application affine de partie linéaire $k\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$. Fixons $B \in E$ et notons $B' = f(B)$. On a pour tout $M \in E$:

$$f(M) = f(B) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{BM}) = B' + k\overrightarrow{BM}.$$

Montrons que f est une homothétie. Pour cela, résolvons l'équation $f(A) = A$ d'inconnue $A \in E$. On a :

$$f(A) = A \Leftrightarrow B' + k\overrightarrow{BA} = A \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{B'A} = k\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BB'} + k\overrightarrow{B'A} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{B'A} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BB'}.$$

Cette équation admet donc une unique solution A, et A est l'unique point fixe de f. Et on a pour tout $M \in E$:

$$f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = A + k\overrightarrow{AM}.$$

f est donc l'homothétie de rapport k et de centre A. □

Définition.

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. On appelle *translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$ l'application notée $t_{\overrightarrow{u}}$ définie par :

$$\forall M \in E, \quad t_{\overrightarrow{u}}(M) = M + \overrightarrow{u}.$$

Propriété 24 (Caractérisation d'une translation par sa partie linéaire)

Les translations sont les applications affines dont la partie linéaire est l'identité.
Lorsque $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, on a $\mathrm{Inv}(t_{\overrightarrow{u}}) = \emptyset$.

Preuve. Soit f une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Pour tout $M, N \in E$, on a :

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(M)M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{Nf(N)} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN}.$$

Donc f est affine et on a $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$.

Réciproquement, soit f une application affine de partie linéaire $\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$. Fixons $A \in E$ et notons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Af(A)}$. On a pour tout $M \in E$:

$$f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = f(A) + \overrightarrow{AM} = A + (\overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{AM}) = (A + \overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{u} = M + \overrightarrow{u}.$$

Donc f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Soit f la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Résolvons l'équation $f(A) = A$ d'inconnue $A \in E$:

$$A = f(A) \Leftrightarrow A = A + \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}.$$

Ainsi si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, on a $\mathrm{Inv}(f) = \emptyset$. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, f est l'identité et $\mathrm{Inv}(f) = E$. □

Représentation matricielle d'une application affine

3.2 Notions affines conservées par une application affine

Propriété 25

Soit $f : E \to F$ une application affine.

(1) Si G est un sous-espace affine de E, alors $f(G)$ est un sous-espace affine de F, de direction $\overrightarrow{f(G)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{G})$. En outre, on a $\dim(f(G)) \leq \dim(G)$, avec égalité si f est injective.

(2) Si H est un sous-espace affine de F, alors $f^{-1}(H)$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E, de direction $\overrightarrow{f^{-1}(H)} = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{H})$.

Preuve.

(1) Fixons $A' \in f(G)$. Il existe $A \in G$ tel que $f(A) = A'$. Pour tout $M' \in F$, on a :

$$\begin{aligned} M' \in f(G) &\Leftrightarrow \exists M \in G,\ M' = f(M) \Leftrightarrow \exists M \in G,\ M' = A' + \overrightarrow{A'f(M)} \\ &\Leftrightarrow \exists M \in G,\ M' = A' + \overrightarrow{f(A)f(M)} \Leftrightarrow \exists M \in G,\ M' = A' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) \\ &\Leftrightarrow \exists \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{G},\ M' = A' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) \Leftrightarrow M' \in A' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{G}) \end{aligned}$$

Ainsi, on a $f(G) = A' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{G})$. Comme de plus $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{G})$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{F}$ (en tant qu'image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire), $f(G)$ est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{G})$.

(2) Soit H un sous-espace affine de F. Supposons que $f^{-1}(H) \neq \emptyset$, et soit $A \in f^{-1}(H)$. Pour tout $M \in E$, on a :

$$\begin{aligned} M \in f^{-1}(H) &\Leftrightarrow f(M) \in H \Leftrightarrow \exists \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{H},\ \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{H},\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{u} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) \in \overrightarrow{H} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{H}) \Leftrightarrow M \in A + \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{H}) \end{aligned}$$

Ainsi on a $f^{-1}(H) = A + \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{H})$. Comme de plus $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ (en tant qu'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire), $f^{-1}(H)$ est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{H})$.

□

Propriété 26

Soit $f : E \to F$ une application affine injective. Si G_1 et G_2 sont deux sous-espaces affines de E, alors $f(G_1 \cap G_2) = f(G_1) \cap f(G_2)$. En particulier :

- si $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, alors $f(G_1) \cap f(G_2) = \emptyset$,
- sinon, $f(G_1) \cap f(G_2)$ est un sous-espace affine de F, de dimension $\dim(G_1 \cap G_2)$.

Remarque. On retient souvent cette propriété en disant qu'une injection affine « conserve le contact » entre sous-espaces. Ainsi, une injection affine transforme par exemple deux droites sécantes en deux droites sécantes.

Théorème 27

Soit $f : E \to F$ une application affine.

(1) f conserve l'alignement, c'est-à-dire : si A, B, C sont alignés, alors $f(A), f(B), f(C)$ le sont aussi.

(2) f conserve le parallélisme des sous-espaces, c'est-à-dire : si $G_1 \| G_2$, alors $f(G_1) \| f(G_2)$. Si de plus f est injective, alors f conserve le strict parallélisme.

(3) f conserve le rapport de vecteurs, c'est-à-dire : si A, B, C, D sont des points de E tels que $A \neq B$, $f(A) \neq f(B)$ et $\text{Aff}(C, D) \| (AB)$, alors

$$\text{Aff}(f(C), f(D)) \| (f(A)f(B)) \quad \text{et} \quad \frac{\overline{f(C)f(D)}}{\overline{f(A)f(B)}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}.$$

Preuve.

(1) Soit Δ une droite contenant A, B, C. Par la Propriété 25, $f(\Delta)$ est un sous-espace affine de dimension 0 ou 1, contenant $f(A), f(B), f(C)$ qui sont donc alignés.

(2) Si par exemple $\overrightarrow{G_1} \subset \overrightarrow{G_2}$, alors $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{G_1}) \subset \overrightarrow{f}(\overrightarrow{G_2})$, et donc $f(G_1) \| f(G_2)$.

(3) La première assertion résulte du point précédent, et ne sert qu'à justifier l'existence du rapport $\dfrac{\overline{f(C)f(D)}}{\overline{f(A)f(B)}}$. Montrons l'égalité :

$$\overrightarrow{f(C)f(D)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{f}\left(\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

D'où l'égalité voulue.

□

Remarque. Nous montrerons dans la suite que les applications affines conservent :

- les barycentres, et en particuliers les isobarycentres (et donc les milieux),
- les segments et l'ensemble des parties convexes.

3.3 Groupe affine

Propriété 28

Soient E, F, G trois espaces affines.

(1) Si $f \in A(E, F)$ et $g \in A(F, G)$, alors $g \circ f \in A(E, G)$ et $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

(2) Si $f \in A(E, F)$ est bijective, alors $f^{-1} \in A(F, E)$ et $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$.

Preuve.

(1) Pour tout $M, N \in E$, on a :

$$\overrightarrow{g \circ f(M) g \circ f(N)} = \overrightarrow{g(f(M))g(f(N))} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f(M)f(N)}) = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN})) = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN}).$$

Donc $g \circ f$ est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

(2) Notons pour commencer que puisque f est bijective, $\overrightarrow{f}$ l'est aussi, et $\overrightarrow{f}^{-1}$ existe bien. Ceci étant dit, prenons $M', N' \in F$. Par bijectivité de f (la surjectivité suffit), il existe $M, N \in E$ tels que $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$. On a :

$$\overrightarrow{f^{-1}(M')f^{-1}(N')} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{f}^{-1} \circ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{f(M)f(N)}) = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{M'N'}).$$

Ainsi f^{-1} est affine, de partie linéaire $\overrightarrow{f}^{-1}$.

□

Corollaire 29

L'ensemble $GA(E)$ des automorphismes affines d'un espace affine E est un groupe pour la loi de composition, appelé *groupe affine de E*.

Preuve. À faire. □

Propriété 30

Soit E un espace affine.

(1) L'application $L : f \in GA(E) \to \overrightarrow{f} \in GL(\overrightarrow{E})$ est un morphisme de groupes surjectif, dont le noyau est l'ensemble des translations de E.

(2) Soit $O \in E$. L'ensemble $GA_O(E)$ des automorphismes affines de E laissant invariant le point O est un sous-groupe de $GA(E)$, et la restriction L_O de L à $GA_O(E)$ est un isomorphisme de $GA_O(E)$ sur $GL(\overrightarrow{E})$.

Preuve. À faire. □

3.4 Groupe des dilatations

Notation.

On note $T(E)$ (resp. $H(E)$) l'ensemble des translations (resp. des homothéties) de E.

Propriété 31

L'ensemble $T(E)$ des translations de E est un sous-groupe distingué et abélien de $GA(E)$, isomorphe au groupe additif $\overrightarrow{E}$.

Preuve. À faire. □

Propriété 32

L'ensemble $D(E) = H(E) \bigcup T(E)$ constitué des homothéties et des translations est un sous-groupe distingué du groupe affine $GA(E)$.

Preuve. À faire. □

Définition.

Un élément de $D(E)$ est appelé *une dilatation*, ou encore *une homothétie-translation.*

Maintenant nous savons par un argument « abstrait » que les composées de dilatations sont des dilatations. Mais il nous reste à comprendre cela d'un point de vue plus « concret », c'est-à-dire calculatoire.

Propriété 33

(1) On a $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$. En particulier, $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$.

(2) $h_{A,\lambda} \circ h_{A,\lambda'} = h_{A,\lambda\lambda'}$. En particulier, $h_{A,\lambda}^{-1} = h_{A,1/\lambda}$.

(3) Soient $h_1 = h_{A_1,\lambda_1}$ et $h_2 = h_{A_2,\lambda_2}$ deux homothéties de centres distincts. alors $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de centre $A \in (A_1A_2)$ et de rapport $\lambda_1\lambda_2$ si $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, et est une translation de vecteur colinéaire à $\overrightarrow{A_1A_2}$ sinon.

(4) Soit $\lambda \neq 1$. Les composées $t_{\vec{u}} \circ h_{A,\lambda}$ ou $h_{A,\lambda} \circ t_{\vec{u}}$ sont des homothéties de rapport λ et dont les centres respectifs sont sur la droite $\mathscr{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$.

Preuve. À faire. □

Propriété 34 (Caractérisation géométrique d'une dilatation)

Soit $f \in A(E)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une dilatation,

(ii) f envoie tout sous-espace affine de E sur un sous-espace qui lui est strictement parallèle,

(iii) f envoie toute droite de E sur une droite qui lui est parallèle.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont évident.

Montrons (iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que f est un endomorphisme affine envoyant toute droite de E sur une droite qui lui est parallèle. Pour toute droite Δ, on a donc $\vec{f}(\vec{\Delta}) \subset \vec{\Delta}$. Ainsi, pour tout vecteur $\vec{i} \in \vec{E}$ non nul, on a $\vec{f}(\mathrm{Vect}(\vec{i})) \subset \mathrm{Vect}(\vec{i})$. En particulier, $\vec{f}(\vec{i})$ appartient à $\mathrm{Vect}(\vec{i})$ et il existe un scalaire $\lambda_{\vec{i}} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\vec{f}(\vec{i}) = \lambda_{\vec{i}} \cdot \vec{i}.$$

Par un résultat classique d'algèbre linéaire, un tel endomorphisme vectoriel $\vec{f}$ est une homothétie vectorielle. Par la caractérisation des dilatations, on en déduit que f est une dilatation. □

On termine par une application à la résolution d'un problème de géométrie plane.

Propriété 35 (Théorème de Ménélaüs)

Soient A, B, C trois points non alignés, et soient $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$. On suppose que $A', B', C' \notin \{A, B, C\}$.

Alors A', B', C' sont alignés si et seulement si $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$.

Preuve.

$\Leftarrow$ Considérons les homothéties suivantes :

- l'homothétie h_1 de centre A' et de rapport $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$, qui envoie C sur B,
- l'homothétie h_2 de centre B' et de rapport $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$, qui envoie A sur C,

– l'homothétie h_3 de centre C' et de rapport $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$, qui envoie B sur A.

Soit $f = h_1 \circ h_2 \circ h_3$. f est une dilatation qui envoie B sur B, donc de centre B et de rapport $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$.

Supposons que $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$. f est alors l'identité, et on a en particulier que $h_3^{-1} = h_1 \circ h_2$. D'après (3) de la Propriété 33, le centre C' de l'homothétie $h_3^{-1} = h_1 \circ h_2$ appartient à $(A'B')$. Donc A', B', C' sont alignés.

$\Rightarrow$ Supposons que A', B', C' sont alignés. Toujours d'après (3) de la Propriété 33, la composée $h = h_1 \circ h_2$ est une homothétie. De plus, si on note C'' son centre, on a $C'' \in (A'B')$. D'autre part, on a $h_1 \circ h_2(A) = B$, donc C'' est aussi sur la droite (AB). C'est donc le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$, de sorte que $C'' = C'$.

Puisque $f = h \circ h_3$ est une composée de deux homothéties de même centre C', c'est une homothétie également de centre C'. Ainsi $f(C') = C'$ et on a également $f(B) = B$. f est donc une dilatation qui fixe deux points distincts. C'est donc l'identité et sont rapport $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ vaut 1.

□

3.5 Affinités

3.6 Points fixes des endomorphismes affines

4 Barycentres

En algèbre linéaire, la notion fondamentale est celle de combinaison linéaire : un sous-espace vectoriel est une partie stable par toute combinaison linéaire de vecteurs, une application linéaire est une application qui transforme toute combinaison linéaire de vecteurs en la combinaison linéaire de leurs images, etc. Dans le contexte affine, un rôle similaire va être joué par la notion de barycentre.

4.1 Définitions, propriétés élémentaires et notations

Définition.

- Une *famille de points pondérés de* E est une famille finie $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $E \times \mathbb{R}$. On dit alors que λ_i est le *poids*, la *masse* ou le *coefficient* de A_i. $m = \sum_{i\in I} \lambda_i$ est le *poids* ou la *masse* totale du système de points pondérés.
- Si $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de points pondérés de E, l'application

$$f : M \in E \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \in \overrightarrow{E}$$

s'appelle la *fonction vectorielle de Leibniz associée à la famille* $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$.

Théorème 36

- Si $m = \sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, alors f est bijective. En particulier, il existe un unique point $G \in E$ vérifiant $f(G) = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire satisfaisant :
$$\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$
- Si $m = \sum_{i \in I} \lambda_i = 0$, alors f est constante. Il existe donc un unique vecteur $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$ tel que $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{v}$ pour tout $M \in E$.

Preuve. Soit $O \in E$ un point fixé. Pour tout $M \in E$, on a :
$$f(M) - f(O) = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MO} = m\overrightarrow{MO}$$
par relation de Chasles. Ainsi, f est constante si et seulement si $m = 0$. Sinon, pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, on a :
$$f(M) = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow f(O) + m\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{m}(f(O) - \overrightarrow{u}).$$
Ainsi f est une bijection de E dans $\overrightarrow{E}$. □

Définition.

Lorsque $m = \sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, le point G défini par la condition $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$ est appelé *le barycentre de la famille* $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$, et noté $G = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$.
Si de plus tous les λ_i sont égaux (et donc non nuls), on dira que G est *l'isobarycentre* de la famille $(A_i)_{i \in I}$. En particulier, l'isobarycentre I de deux points A et B s'appelle *le milieu du bipoint* (A, B).

Propriété 37

Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ un système de points pondérés de E avec $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $G = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$,

(ii) $\forall M \in E, \left(\sum_{i \in I} \lambda_i\right) \overrightarrow{MG} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$,

(iii) $\exists M \in E, \left(\sum_{i \in I} \lambda_i\right) \overrightarrow{MG} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$.

Preuve. Laissée en exercice. □

Propriété 38

Soit $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ un système de points pondérés de E avec $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$.

(1) **Commutativité.** $\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I} = \mathrm{bar}(A_{\sigma(i)}, \lambda_{\sigma(i)})_{i\in I}$ pour toute permutation σ de l'ensemble I.

(2) **Homogénéité.** $\mathrm{bar}(A_i, \alpha\lambda_i)_{i\in I} = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

(3) **Associativité.** Soit $I = \bigsqcup_{k=1}^{p} I_k$ une partition de I. On suppose que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, le scalaire $\mu_k = \sum_{i\in I_k} \lambda_i$ est non nul, et on note $G_k = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I_k}$. Alors $\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I} = \mathrm{bar}(G_k, \mu_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$.

Preuve. Laissée en exercice. □

Conséquences.

- Quitte à diviser chaque poids λ_i par le poids total $m = \sum_{i\in I} \lambda_i$, on peut toujours se ramener par homogénéité du calcul barycentrique à un système où $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$.
- À l'aide de l'associativité du calcul barycentrique, la construction d'un barycentre de $m \geq 2$ points peut se ramener, par étapes successives, à $m - 1$ constructions de barycentres de deux points.

Exercice. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si les bipoints (A, C) et (B, D) ont même milieu, appelé *centre* du parallélogramme.

> A faire.

Propriété 39

Soit ABC un triangle non aplati. Notons B' (resp. C', A') le milieu du bipoint (A, C) (resp. (A, B), (B, C)). Alors les droites (AA'), (BB') et (CC'), appelées *médianes du triangle* ABC, sont concourantes en l'isobarycentre G de A, B, C, appelé *centre de gravité du triangle*.

4.2 Caractérisation barycentrique des sous-espaces et applications affines

Propriété 40

Pour qu'une partie non vide F de E soit un sous-espace affine de E, il faut et il suffit que tout barycentre d'une famille de points pondérés de F reste dans F.

Preuve.

- $\Rightarrow$ Supposons que F soit un sous-espace affine passant par le point A et de direction le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ de $\overrightarrow{E}$. Montrons que F est stable par calcul barycentrique. Soit pour cela $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ une famille de points pondérés de F, avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Montrons que $G = \mathrm{bar}((A_i, \alpha_i)_{i=1,\ldots,n}$ appartient à F. On a :

$$\overrightarrow{AG} = \alpha_1 \underbrace{\overrightarrow{AA_1}}_{\in \overrightarrow{F}} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\overrightarrow{AA_n}}_{\in \overrightarrow{F}} \in \overrightarrow{F}$$

car $\overrightarrow{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Donc $G = A + \overrightarrow{AG}$ appartient à $A + \overrightarrow{F} = F$.

- $\Leftarrow$ Supposons que F soit un sous-ensemble non vide de E stable par calcul barycentrique. Prenons $A \in F$, et montrons que $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AB},\ B \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Il est déjà non vide car contient $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$. Soit maintenant $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AB_1}$ (avec $B_1, B_2 \in \mathscr{F}$) et $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{AB_2}$ dans $\overrightarrow{F}$, et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} = \alpha_1 \overrightarrow{AB_1} + \alpha_2 \overrightarrow{AB_2} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AG}$$

où $G = \mathrm{bar}((A, 1 - \alpha_1 - \alpha_2), (B_1, \alpha_1), (B_2, \alpha_2))$. Comme F est stable par calcul barycentrique, G appartient bien à F, si bien que :

$$\alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{AG} \in \overrightarrow{F}.$$

Ainsi $\overrightarrow{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$, et $F = A + \overrightarrow{F}$ est un sous-espace affine de E.

□

Théorème 41

Soit X une partie non vide de E. Alors $\mathrm{Aff}(X)$ est exactement l'ensemble des barycentres des familles de points pondérés à support dans X.

Preuve. Notons F l'ensemble des barycentres des familles de points pondérés à support dans X.

- $\subset$ Puisque $\mathrm{Aff}(X)$ est un sous-espace affine, donc stable par calcul barycentrique, qui contient X, on a $F \subset \mathrm{Aff}(X)$.

- $\supset$ Soit G le barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i=1,\ldots,k}$ à support dans F. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, A_i appartient à F, et est donc lui-même barycentre de points pondérés à support dans X. Par associativité du calcul barycentrique, on en déduit que G est également barycentre de points pondérés à support dans X cette fois. Par définition de F, on a $G \in F$. Ainsi F est stable par calcul barycentrique et est non vide (car $X \subset F$ et $X \neq \emptyset$). Donc F est un sous-espace affine de E qui contient X. D'où l'inclusion $\mathrm{Aff}(X) \subset F$.

□

Théorème 42

Soit $f : E \to F$ une application (ensembliste) entre deux espaces affines. Alors f est affine si et seulement si « f conserve les barycentres », c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall (A_i, \lambda_i)_{i \in I} \text{ telle que } \sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0, \quad f(\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}) = \mathrm{bar}(f(A_i), \lambda_i)_{i \in I}.$$

Preuve.

$\Rightarrow$ Soit $G = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$. On a :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{f}\left(\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{GA_i}\right) = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \overrightarrow{0}$$

Ainsi $f(G)$ apparait comme le barycentre de la famille de points pondérés $(f(A_i), \lambda_i)_{i\in I}$.

$\Leftarrow$ Supposons que f conserve les barycentres. Fixons $A \in E$. Pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, on pose $\sigma(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\overrightarrow{u})}$. Montrons que l'application $\sigma : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ ainsi définie est linéaire. Soit pour cela $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Posons $M = A + \overrightarrow{u}$, $N = A + \overrightarrow{v}$ et $G = A + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$. On a :

$$\sigma(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v})} = \overrightarrow{f(A)f(G)}.$$

D'autre part, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{AM} + \mu\overrightarrow{AN} = (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{AA} + \lambda\overrightarrow{AM} + \mu\overrightarrow{AN}..$$

G apparait donc comme le barycentre $\mathrm{bar}((A, 1-\lambda-\mu), (M, \lambda), (N, \mu))$. Puisque f conserve les barycentre, on a $f(G) = \mathrm{bar}((f(A), 1-\lambda-\mu), (f(M), \lambda), (f(N), \mu))$, ce qui s'écrit aussi :

$$\overrightarrow{f(A)f(G)} = (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{f(A)f(A)} + \lambda\overrightarrow{f(A)f(M)} + \mu\overrightarrow{f(A)f(N)} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(A+\overrightarrow{u})} + \mu\overrightarrow{f(A)f(A+\overrightarrow{v})},$$

soit encore :

$$\sigma(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \lambda\sigma(\overrightarrow{u}) + \mu\sigma(\overrightarrow{v}).$$

Ainsi σ est linéaire, et pour tout $B \in E$, on a donc :

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \sigma(\overrightarrow{AB}).$$

Cette relation n'est a priori valable que pour le point A fixé préalablement. Mais on a plus généralement que pour tout $B, C \in E$:

$$\overrightarrow{f(B)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(C)} - \overrightarrow{f(A)f(B)} = \sigma(\overrightarrow{AC}) - \sigma(\overrightarrow{AB}) = \sigma(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \sigma(\overrightarrow{BC}).$$

Ainsi f est une application affine (de partie linéaire σ).

□

4.3 Familles libres, familles génératrices, bases (repères affines)

Définition.

On dit qu'une partie non vide X de E est *(affinement) génératrice* dans E si $\mathrm{Aff}(X) = E$.

Définition.

Soit $X = (A_0, \ldots, A_p)$ une famille finie de $p+1$ points de E. On appelle *rang de X* et on note $\mathrm{rg}(X)$ la dimension de $\mathrm{Aff}(X)$.

Remarque. On a vu que $\mathrm{Aff}(A_0, \ldots, A_p) = A_0 + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p})$. Le rang de $(A_0, \ldots, A_p)$ est donc égal au rang de la famille de vecteurs $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p})$. En particulier, on a $0 \leq \mathrm{rg}(A_0, \ldots, A_p) \leq \min(n, p)$.

Définition.

Soit $X = (A_0, \ldots, A_p)$ une famille finie de $p+1$ points de E.

- Si $\mathrm{rg}(X) = p$, on dit que la famille X est *(affinement) libre* dans E, ou que les A_i sont *(affinement) indépendants* dans E. Dans le cas contraire où $\mathrm{rg}(X) < p$, on dira que la famille X est *(affinement) liée*, ou que les A_i sont *(affinement) dépendants*.
- Si X est une famille à la fois libre et génératrice dans E, on dit que X est une *base (affine)* de E, ou encore un *repère affine* de E.

À partir de ces définitions, nous allons pouvoir étendre de manière quasi immédiate des résultats classiques d'algèbre linéaire au cadre affine. Nous avons par exemple la :

Propriété 43

Soit $X = (A_0, \ldots, A_p)$ une famille de $p+1$ points de E. On suppose que E est de dimension n et on note $Y = (\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p})$.

(1) X est libre dans E si et seulement si Y est libre dans $\overrightarrow{E}$, et dans ce cas $p \leq n$.

(2) X est génératrice dans E si et seulement si Y est génératrice dans $\overrightarrow{E}$, et dans ce cas $p \geq n$.

(3) X est une base de E si et seulement si Y est une base de $\overrightarrow{E}$, et dans ce cas $p = n$.

En dimension n toute base (affine) de l'espace possède donc $n+1$ points.

(4) Si $p = n$, il y a équivalence entre les assertions :

(i) X est libre, (ii) X est génératrice, (iii) X est une base.

Preuve. À faire. □

Donnons aussi un autre résultat utile.

Propriété 44

Soit $X = (A_0, \ldots, A_p)$ une famille finie de points de E. Alors :

$$X \text{ est liée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in [\![0, p]\!], \quad A_i \in \mathrm{Aff}(A_0, \ldots, \widehat{A_i}, \ldots, A_p).$$

Par conséquent :

$$X \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![0, p]\!], \quad A_i \notin \mathrm{Aff}(A_0, \ldots, \widehat{A_i}, \ldots, A_p).$$

Preuve. À faire. □

Remarque. Tous les résultats classiques d'algèbre linéaire s'étendent ainsi de manière naturelle et immédiate dans le cadre affine (théorème de la base incomplète et de la base extraite, ...).

Exemples.

- Deux points A, B d'une droite en forment un repère affine si et seulement s'ils sont distincts.
- Trois points A, B, C d'un plan en forment un repère affine si et seulement s'ils sont non alignés.
- Quatre points A, B, C, D d'un espace tridimensionnel en forment un repère affine si et seulement s'ils sont non coplanaires.

Théorème 45

Soient E et F deux espaces affines, $(A_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ un repère affine de E, et $(B_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une famille quelconque de points de F.
Alors il existe une unique application affine $f : E \to F$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout $i = 0, \dots, n$. En outre, on a :

- f est injective si et seulement si (B_i) est libre dans F,
- f est surjective si et seulement si (B_i) est génératrice dans F,
- f est bijective si et seulement si (B_i) est un repère affine de F.

Preuve. À faire. □

Corollaire 46

La seule application affine d'un espace affine E de dimension n qui fixe $n+1$ points indépendants est l'identité.

4.4 Coordonnées barycentriques dans un repère affine

Grâce aux barycentres, nous allons introduire un autre système de repérage que celui des coordonnées cartésiennes.

Propriété 47

Soit $(A_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ un repère affine de E. Alors pour tout point $M \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ telle que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ et $M = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$.
On dit que les λ_i sont les *coordonnées barycentriques* de M dans le repère affine $(A_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$.

Preuve. À faire. □

Propriété 48 (Passage entre un repérage barycentrique et cartésien)

On suppose E de dimension n.

(1) Si $\mathscr{R} = (A_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est un repère affine de E, alors pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $\mathscr{S}_j = (A_j, (\overrightarrow{A_jA_i})_{i\in[\![0,n]\!]\setminus\{j\}})$ est un repère cartésien de E.

Si M a pour coordonnées barycentriques $(\lambda_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ dans $\mathscr{R}$, alors M aura pour coordonnées cartésiennes $(\lambda_i)_{i\in[\![0,n]\!]\setminus\{j\}}$ dans $\mathscr{S}_j$. Il suffit donc d'« oublier » la j-ème coordonnée.

(2) Réciproquement, si $\mathscr{S} = (O, (\overrightarrow{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]})$ est un repère cartésien de E, alors $\mathscr{R} = (O, O + \overrightarrow{e_1}, \dots, O + \overrightarrow{e_n})$ est un repère affine de E.

Si M a pour coordonnées cartésiennes $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ dans $\mathscr{S}$, alors M aura pour coordonnées cartésiennes $(\lambda_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ dans $\mathscr{R}$, où $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Preuve. À faire. □

Remarque. La donnée d'un repère cartésien est donc équivalente à la donnée d'un repère affine. Mais il y a cependant une différence fondamentale entre un repère cartésien et un repère affine : contrairement au repère cartésien $\mathscr{S}$ où le point O a le rôle spécifique d'origine, tous les points d'un repère affine jouent parfaitement le même rôle. C'est précisément pour cette raison qu'il est souvent bien plus commode de travailler avec un repère affine et des coordonnées barycentriques qu'avec un repère cartésien et des coordonnées cartésiennes.

5 Convexité dans un espace affine réel